
Chapitre 5 : Programmation dynamique

Exemple 3.1 (Partition d'un entier). Une partition d'un entier $n > 0$ est une suite finie d'entiers $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tels que $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_k$ et $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$. Par exemple, les partitions de 5 sont : $1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 1 + 2$, $1 + 1 + 3$, $1 + 2 + 2$, $1 + 4$, $2 + 3$, 5. Notons $f(n, k)$ le nombre de partitions de n en k parties.

1. Montrer que $f(n, k) = f(n - 1, k - 1) + f(n - k, k)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket$. Que vaut $f(n, 1)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$? et $f(1, n)$?
2. En déduire un méthode programmation dynamique pour programmer `partition(n)` qui renvoie le nombre de partitions d'un entier n .