# Chapitre 5 : Corrigés des exercices

## 4 Exercices

**Exemple 4.1** (Partition d'un entier)**.** Une partition d'un entier $n > 0$ est une suite finie d'entiers $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tels que $0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = n$. Par exemple, les partitions de 5 sont : $1+1+1+1+1$, $1+1+1+2$, $1+1+3$, $1+2+2$, $1+4$, $2+3$, $5$. Notons $f(n,k)$ le nombre de partitions de $n$ en $k$ parties.

1. La relation provient d'une disjonction de cas parmi ces partitions :
   — soit la dernière partie (la plus petite) vaut 1, auquel cas la partition est obtenue à partir d'une partition de $n-1$ en $k-1$ parties, par adjonction de cette dernière partie ;
   — soit toutes les parties valent au moins 2, auquel cas la partition est obtenue à partir d'une partition de $n-k$ en $k$ parties, par augmentation de chaque partie d'une unité.
2. On peut remarquer que $f(n,n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On applique ensuite la formule en utilisant une matrice :

```
import numpy as np
def partition_1(n):
        M=np.zeros((n+1,n+1),dtype=int)
        for k in range(1,n+1):
                M[k,k] = 1
        for i in range(1,n+1):
                M[i,1] = 1
        for i in range(1,n+1):
                for j in range(1,n+1):
                        if i !=j and i >= j and j!=1:
                                M[i,j] = M[i-1,j-1] + M[i-j,j]
        total_partitions = sum(M[n,:])
        return(total_partitions)
```

   On doit sommer sur la dernière ligne pour avoir le nombre total.