

---

## TP1 : Méthodes numériques pour la résolution d'équation

---

### 1 Méthode d'Euler pour la résolution d'équations différentielles

Les méthodes numériques sont utiles pour résoudre de façon approchée des équations pour lesquelles les expressions des solutions analytiques ne sont pas utilisables. Ici, pour tester notre résolution numérique, nous prendrons une équation dont on connaît la solution.

#### 1.1 Problèmes de Cauchy et méthode d'Euler explicite

Un problème de Cauchy est un problème de la forme :

$$\begin{cases} dy = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{sur l'intervalle } [t_0, t_0 + T]$$

Lorsque  $f$  a des propriétés raisonnables (par exemple de classe  $\mathcal{C}^1$  en les deux variables), un tel problème possède une unique solution  $y$ . C'est ce qu'on supposera dans la suite. La méthode (ou algorithme) d'Euler permet de déterminer une solution approchée, c'est à dire une approximation de la fonction  $y$ .

On découpe l'intervalle des abscisses (le temps ici) en  $N$  intervalles de taille  $h$  identique. À partir du point  $(t_0, y(t_0))$  supposé connu, on trace le segment de droite de pente la dérivée en  $t_0$  soit  $\frac{dy}{dt}(t_0)$  égal à  $f(t_0, y(t_0))$  du problème de Cauchy précédent. On peut maintenant approcher  $y(t_0 + h)$  par  $\tilde{y}(t_0 + h)$ . On trace un nouveau segment de droite à partir de ce point  $(t_0 + h, \tilde{y}(t_0 + h))$  et de pente  $\frac{d\tilde{y}}{dt}(t_0 + h)$  ainsi de suite jusqu'à  $t = t_0 + T$ . Cette méthode peut se résumer par le schéma numérique de résolution suivant :

$$\begin{cases} \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h f(t_n, \tilde{y}_n) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$\tilde{y}_{n+1}$  s'obtient à partir uniquement de  $\tilde{y}_n$  : la méthode est dite à 1 pas.

##### Question 1.

Écrire une fonction `EulerExplicite1(f, t0, tf, n, y0)` permettant une résolution numérique de ce type de problème par la méthode d'Euler explicite. Elle prend comme argument, la fonction  $f$  considérée, les instants initiaux et finaux  $t_0$  et  $t_f$ , le nombre de points de calculs  $n$  et enfin la condition initiale  $y_0$ .

Votre fonction permettra de récupérer en sortie deux listes, celle des abscisses `liste_t` et celle des ordonnées `liste_y` calculées par cette méthode.

##### Question 2.

Tester votre fonction sur l'équation différentielle :

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2 \cdot t \cdot \cos y(t) \quad \text{avec} \quad y(0) = 1$$

dans le cas où la solution est sur  $[0, 5]$  avec  $n = 50$  points.

##### Question 3.

Tester pour  $n = 20$ , que constatez vous ? Pour  $n = 10$  ?

Vous venez de mettre en évidence un phénomène d'instabilité numérique.

#### 1.2 Dichotomie

La méthode par dichotomie est d'approcher la solution par réduction successive de l'intervalle de recherche. Cette méthode est adaptée pour les fonctions monotones dont on recherche le zéro :

- choix de l'intervalle de départ  $[a, b]$  ;
- tant que  $|b - a| > \varepsilon$  :
  - $c = \frac{a + b}{2}$  ;

- si  $f(c) f(a) > 0$ , alors  $a = c$ ;
- sinon  $b=c$

Le critère d'arrêt retenu sera  $\varepsilon < 10^{-10}$  sauf indication contraire.

#### Question 4.

Écrire une fonction `dichotomie(f, a, b, epsilon)` : permettant une résolution numérique de l'équation  $f(x) = 0$  sur l'intervalle  $[a, b]$  avec une tolérance `epsilon`,  $\varepsilon$ . On testera notre algorithme sur le cas de la fonction  $f$  qui à  $x$  associe  $f(x) = \cos(x) - x$

### 1.3 Algorithme d'Euler implicite

Nous avons vu apparaître de l'instabilité avec la méthode d'Euler explicite. Nous allons ici implémenter la version implicite et voir ce qu'il en est.

Son schéma numérique de résolution est le suivant :

$$\begin{cases} \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Mais  $\tilde{y}_{n+1}$  est racine de  $0 = \tilde{y}_n + h f(t_{n+1}, x) - x = g(x)$  qu'il faut donc résoudre. On pourra si cela est nécessaire, utiliser la méthode de Dichotomie.

#### Question 5.

Écrire une fonction `euler_implicite(f, t0, tf, n, y0)` : permettant une résolution numérique de ce type de problème par la méthode d'Euler implicite. Votre fonction permettra de récupérer en sortie deux listes, celle des abscisses `liste_t` et celle des ordonnées `liste_y` calculées par cette méthode. La méthode de résolution de l'équation en  $yn+1$  est celle de la dichotomie.

#### Question 6.

Tester votre fonction sur l'équation différentielle :

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2 \cdot t \cdot \cos y(t) \quad \text{avec} \quad y(0) = 1$$

dans le cas où la solution est sur  $[0, 5]$  avec  $n = 50$  points.

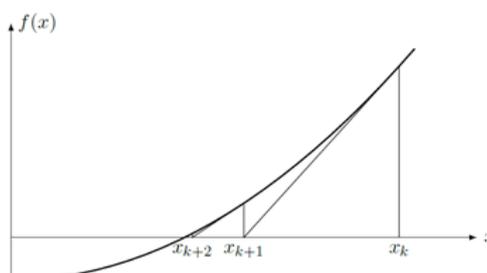
#### Question 7.

Tester à nouveau votre fonction pour  $n = 10$ . Vous devriez voir que contrairement au schéma d'Euler explicite, Euler implicite demeure stable.

## 2 Méthode de Newton pour la recherche de zéro

Dans cette partie, nous allons utiliser un autre algorithme (Newton) pour résoudre une équation du type  $f(x) = 0$ . Avec la dichotomie, ces algorithmes sont des algorithmes itératifs qu'il convient d'arrêter lorsque l'on atteint un critère. Le critère d'arrêt retenu sera  $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-10}$  sauf indication contraire. Pour chacun des algorithmes, on observera l'ordre de convergence  $ordre(i) = \frac{\log(|x_i - x_{i-1}|)}{\log(|x_{i-1} - x_{i-2}|)}$ . Plus l'ordre est élevé, plus l'algorithme converge rapidement vers la solution.

Le principe de la méthode de Newton est de chercher le zéro d'une fonction en prenant comme nouvelle approximation l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la fonction au point d'approximation précédente.



L'équation générale de la tangente à la fonction  $f(x)$  au point d'abscisse  $x_k$ , coupant l'axe des abscisses au point d'abscisse  $x_{k+1}$  est :  $y(x) = f'(x) (x - x_{k+1})$ .

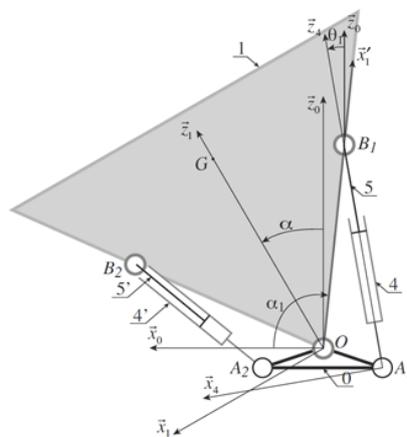
En particulier, en  $x_k$ , on a :  $y(x_k) = f'(x_k) (x_k - x_{k+1}) = f(x_k)$  (car la tangente et la courbe sont concourantes au point  $(x_k, f(x_k))$ ).

On en déduit que  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ .

Cette méthode a un ordre de convergence théorique de 2 quand on est capable de déterminer précisément la dérivée. Quand cette dérivée n'est pas connue, on peut déterminer une approximation. Ici, on l'approchera par :  $f'(x_k) = \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h}$ .

## 2.1 Application à la loi entrée-sortie du Clever

On s'intéresse au mouvement de la cabine du véhicule à trois roues Clever dont la cabine s'incline à l'image d'une moto pour prendre un virage.



$$\begin{aligned} \alpha &= (\vec{z}_0, \vec{z}_1) \\ \alpha_1 &= (\vec{x}_0, \vec{x}'_1) \\ \theta_1 &= (\vec{z}_0, \vec{z}_4) \\ \vec{OA}_1 &= -a \cdot \vec{x}_0 - b \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{A_1B_1} &= \lambda_1 \cdot \vec{z}_4 \\ \vec{OB_1} &= L \cdot \vec{x}'_1 \end{aligned}$$

Pour piloter le mécanisme, il est nécessaire de connaître l'angle de la cabine en fonction de l'élongation des vérins. L'étude géométrique permet d'obtenir facilement l'élongation en fonction de l'angle :

$$\lambda_1(\alpha) = \sqrt{(L \cos(\alpha - 130^\circ) + a)^2 + (L \sin(\alpha - 130^\circ) - b)^2}$$

Avec  $\alpha \in [-50^\circ, 50^\circ]$ ,  $a = 0,14$  m,  $b = 0,046$  m et  $L = 0,49$  m. L'objectif est de déterminer l'angle  $\alpha$  pour une valeur d'élongation  $\lambda_1$  donnée.

### 2.1.1 Approche graphique

#### Question 8.

Définir la fonction `lambda1(alpha)`.

#### Question 9.

Tracer l'angle  $\alpha$  en fonction de  $\lambda_1$  sur le domaine d'étude considéré (prendre un pas de  $1^\circ$ )

#### Question 10.

Déterminer graphiquement, à l'aide de zoom sur la figure, l'angle  $\alpha$  pour un allongement de  $\lambda_1 = 0,4$  m.

### 2.1.2 Dichotomie

#### Question 11.

Implanter cet algorithme dans une fonction `dichotomie(f,a,b,epsilon)` et vérifier que le résultat renvoyé correspond à celui attendu.

#### Question 12.

Modifier votre algorithme pour afficher le nombre d'itérations ainsi que la solution quand la convergence est atteinte.

**Question 13.**

Modifier votre algorithme pour que celui-ci renvoie la liste contenant les solutions successives obtenues à chaque itération. On supposera que la solution à chaque itération est  $\frac{a+b}{2}$ .

**Question 14.**

Ecrire une fonction `ordre(listex)` qui renvoie la liste contenant l'ordre de convergence en fonction des itérations. En déduire l'ordre de convergence de la méthode par dichotomie.

**2.1.3 Newton****Question 15.**

Ecrire une fonction `newton(f,xini)` qui affiche la solution, le nombre d'itérations et qui renvoie la liste des approximations  $x_k$  successives en prenant la dérivée exacte.

**Question 16.**

Écrire une fonction `newton2(f,xini)` qui affiche la solution, le nombre d'itérations et qui renvoie la liste des approximations  $x_k$  successives en prenant la dérivée approchée pour  $h = 0, 1$ .

**Question 17.**

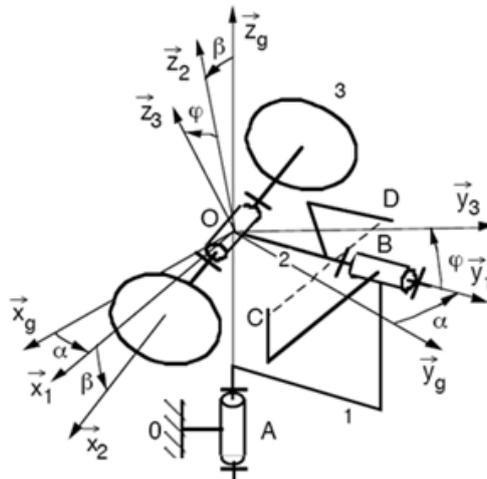
Comparer la convergence de cet algorithme pour différentes valeurs de  $h$  par pas de 10 ( $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ ) et déterminer une valeur qui semble optimale.

**Question 18.**

Déterminer l'évolution de l'ordre de convergence en fonction des itérations et en déduire l'ordre de convergence pour différentes valeurs de  $h$ . Comparer à la valeur théorique.

**2.2 Application au comportement dynamique d'un gyroscope - Pour les plus rapides**

Un gyroscope mécanique tournant est un solide 3 animé d'une grande vitesse de rotation par rapport 2 et libre de rotation suivant les deux autres axes (voir figure suivante).



On attache le repère  $\mathcal{R}_g(O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$  repère galiléen au bâti 0. Le champ de pesanteur est donné par  $\vec{g} = -g \vec{z}_g$ . Le support 1, de masse  $M$ , est lié au bâti par une liaison pivot d'axe  $(0, \vec{z}_g)$ . Il peut être mis en mouvement par un dispositif non représenté. On lui attache le repère  $\mathcal{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  et on pose  $\alpha = (\vec{x}_g, \vec{x}_1)$ .

Les points  $B$  et  $C$  sont liés au support 1 :  $\vec{OB} = b \vec{y}_1$  et  $\vec{OC} = a \vec{x}_1 + b \vec{y}_1 + c \vec{z}_g$ . La pièce 2, est liée au support 1 par une liaison pivot parfaite d'axe  $(0, \vec{y}_1)$ . On lui attache le repère  $\mathcal{R}_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ .

On pose :  $\beta = (\vec{z}_g, \vec{z}_2)$  et  $\vec{OD} = b \vec{y}_1 + c \vec{z}_2$ .

Au niveau de cette dernière liaison, on considère un frottement visqueux. La masse de la pièce 2 est négligée devant les autres masses.

Le rotor 3, de masse  $m$  et de centre d'inertie  $O$ , est lié à la pièce 2 par une liaison pivot d'axe  $(0, \vec{x}_2)$ . On lui attache le repère  $\mathcal{R}_3(O, \vec{x}_2, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ .

On pose :  $\varphi = (\vec{y}_1, \vec{y}_3)$  et  $\bar{I}(O, 3) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_3}$ .

Un ressort non représenté, de masse négligeable, de raideur  $k$  et de longueur libre  $a$ , est placé entre les points  $C$  et  $D$ . Un moteur non représenté, dont le stator est solidaire de 2, entraîne le rotor 3 en rotation. Les moments d'inertie de 2 sont négligés.

Valeurs numériques du gyroscope du laboratoire :  $A = 2200 \text{ g}\cdot\text{mm}^2$ ,  $B = 6600 \text{ g}\cdot\text{mm}^2$ ,  $k = 17 \text{ N/m}$ ,  $c = 0,012 \text{ m}$ ,  $\dot{\varphi} = 6300 \text{ tr/min} = 660 \text{ rad/s}$ ,  $\dot{\alpha} = -10 \text{ tr/min} = -1,05 \text{ rad/s}$ ,  $\mu = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ .

On impose les vitesses précédentes.

L'application du théorème du moment dynamique sur l'ensemble (2,3) suivant l'axe  $(0, \vec{y}_1)$  permet d'obtenir l'équation du mouvement :

$$B \ddot{\beta} + \cos(\beta) \sin(\beta) (B - A) \dot{\alpha}^2 + A \dot{\alpha} \dot{\varphi} \cos(\beta) = -\mu \dot{\beta} - 2 k c^2 \sin(\beta)$$

L'application numérique donne :

$$6,6 \cdot 10^{-6} \ddot{\beta} + 1,5 \cdot 10^{-4} \dot{\beta} + 4,4 \cdot 10^{-6} \cos(\beta) \sin(\beta) + 4,9 \cdot 10^{-3} \sin(\beta) - 1,5 \cdot 10^{-3} \cos(\beta) = 0$$

Nous prendrons les conditions initiales suivantes :  $\beta(0) = 0$  et  $\dot{\beta}(0) = 0$ . Le signal d'entrée  $\dot{\alpha}$  est supposé nul à  $t < 0$ . On suppose  $\dot{\varphi}$  établie.

En supposant  $\beta$  petit et variant autour du point d'équilibre  $\beta = 0$ , on peut linéariser cette équation et la mettre sous la forme suivante (avec  $u(t)$  fonction de Heaviside afin de respecter la causalité du phénomène) :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{\beta} + \frac{2\xi}{\omega_0} \dot{\beta} + \beta = K u(t)$$

avec  $\omega_0 = 27,26 \text{ rad/s}$ ,  $\xi = 0,417$  et  $K = 0,306$

#### Question 19.

Écrire le problème de Cauchy associé en posant  $\dot{\beta}(t) = q(t)$ .

#### Question 20.

Écrire les deux équations de récurrence permettant de résoudre l'équation différentielle par la méthode d'Euler explicite.

#### Question 21.

Écrire la fonction `EulerExplicite2` Python, permettant d'obtenir  $\beta(t)$  par la méthode d'Euler explicite. La résolution se fera de 0 à 1 s pour 500 pas de temps.

On rappelle la solution exacte d'une réponse indicielle unitaire ( $u(t) = 1$  pour  $t \geq 0$ ) :

$$s(t) = K e_0 \left( 1 - e^{-\xi \omega_0 t} \left( \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) \right) \right) u(t) \text{ avec } e(t) = e_0 u(t)$$

#### Question 22.

Tracer  $\beta(t)$  par la méthode d'Euler explicite et la solution exacte. Vérifier les hypothèses de petites variations. Conclure sur la qualité d'Euler explicite pour le nombre de pas de temps choisi.

#### Question 23.

Modifier le nombre de pas de temps en prenant 10, 50 et 500 pas de temps et étudier son influence sur la qualité de la réponse obtenue.

#### Question 24.

Écrire les deux équations de récurrence permettant de résoudre l'équation différentielle par la méthode d'Euler implicite.

#### Question 25.

Écrire la fonction Python `EulerImplicite2`, permettant d'obtenir  $\beta(t)$  par la méthode d'Euler implicite.

#### Question 26.

Tracer  $\beta(t)$  par la méthode d'Euler implicite et comparer aux tracés précédents.