Proposition de corrigé : Banque PT – Épreuve A – 2025

1. (a) Pour tout $P \in \mathbb{R}(X)$, $\varphi(P) \in \mathbb{R}[X]$.
   Soient $P, Q \in \mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
   $\varphi(\lambda P + \mu Q) = (\lambda(X^2-1)P' + \mu(X^2-1)Q')' = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q)$, en utilisant deux fois la linéarité de la dérivation.
   φ est linéaire. Ainsi, φ bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) $\varphi(1) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\varphi(X^n) = (n(X^2-1)X^{n-1})' = (nX^{n+1} - nX^{n-1})'$.
   Si $n = 1$, $\varphi(X) = 2X$, si $n > 1$, $\varphi(X^n) = (n+1)nX^n - n(n-1)X^{n-2}$.

2. $U_1(X) = (X^2-1)$, d'où $P_1(X) = U_1'(X) = 2X$.
   $U_2(X) = (X^2-1)^2$, $U_2'(X) = 2X \times 2(X^2-1) = 4X^3 - 4X$, d'où $P_2(X) = 12X^2 - 4$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le degré du produit de deux polynômes étant la somme de leurs degrés, le degré de U_n est $2n$, la dérivation diminuant le degré de 1 si le polynôme est non constant, le polynôme dérivé n^e d'un polynôme de degré $k > n$ est de degré $k - n$.
   Donc P_n est un polynôme de degré n. Ces résultats restent vrais pour $n = 0$.
   Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(U_n) = 2n$ et $\deg(P_n) = n$.
4. On fixe $n \in \mathbb{N}$.
   (a) $U_n' = 2nX(X^2-1)^{n-1}$, donc $(X^2-1)U_n' = 2nX(X^2-1)^n = 2nXU_n$.
   (b) Si P et Q sont deux polynômes et p un entier naturel, la formule de Leibniz donne :
   $(PQ)^{(p)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} P^{(k)} Q^{(p-k)}$.
   (c) Dérivons $n+1$ fois l'égalité (E), par la formule de Leibniz, on obtient :
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (X^2-1)^{(k)} U_n^{(n-k+2)} = 2n \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} X^{(k)} U_n^{(n+1-k)}$
   Or pour $k > 2$, $(X^2-1)^{(k)} = 0$ et pour $k > 1$, $X^{(k)} = 0$.
   On en déduit $(X^2-1)U_n^{(n+2)} + 2(n+1)XU_n^{(n+1)} + n(n+1)U_n^{(n)} = 2nXU_n^{(n+1)} + 2n(n+1)U_n^{(n)}$
   D'où $(X^2-1)U_n^{(n+2)} + 2XU_n^{(n+1)} = n(n+1)U_n^{(n)}$.
   Or $\varphi(P_n) = ((X^2-1)U_n^{(n+1)})' = (X^2-1)U_n^{(n+2)} + 2XU_n^{(n)}$
   On en déduit : $\varphi(P_n) = n(n+1)P_n$

Dans cette question, on fixe un entier naturel non nul N.

5. φ est linéaire et pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $\deg(\varphi(X^k)) = k$ et $\varphi(X^0) = 0$.
   Donc, si $P \in \mathbb{R}_N[X]$, $\varphi(P)$ est combinaison linéaire de polynôme de degré inférieur ou égal à N et $\varphi(P) \in \mathbb{R}_N[X]$
   Donc $\mathbb{R}_N[X]$ est stable par φ.
6. φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n+1$.
   M_N est une matrice carrée d'ordre $N+1$.
   De plus $\varphi(X^0)) = 0$, $\varphi(X) = 2X$ et pour $k \geqslant 2$, $\varphi(X^k) = (k+1)kX^k - k(k-1)X^{k-2}$.

On a donc $M_N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 6 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & -N(N-1) \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & N(N+1) \end{pmatrix}$

7. M_N est triangulaire supérieure : ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux et ce sont aussi les valeurs propres de φ_N.
   $x \mapsto x(x+1)$ est injective sur $\mathbb{R}^+$, car strictement croissante, donc injective et les coefficients diagonaux de M_N sont deux à deux distincts.
   Ainsi, $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{k(k+1), k \in [\![0, N]\!]\}$, et toutes les valeurs propres sont de multiplicité 1.
   Ainsi, le polynôme caractéristique de φ_N est scindé à racines simples. Cet endomorphisme est donc diagonalisable.
8. On note E_k le sous-espace propre de φ_N associé à la valeur propre $k(k+1)$.
   $k(k+1)$ étant valeur propre de multiplicité 1, $\dim(E_k) = 1$.
   De plus P_k est non nul et $P_k \in E_k$ d'après la question 4(c). Donc (P_k) est une base de E_k.
   Les sous-espaces propres de φ_N sont les droites vectorielles engendrées par P_k, avec k variant entre 0 et N..
9. Soit $k \in \mathbb{N}$. $P_k \neq 0$ et $\varphi(P_k) = k(k+1)P_k$, donc $k(k+1)$ est valeur propre de φ.
   Réciproquement, si λ est valeur propre de φ, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P) = \lambda P$. Soit N =deg(P). $P \in \mathbb{R}_N[X]$, donc $\varphi_N(P) = \lambda P$. Donc λ est valeur propre de φ_N, associée à un vecteur propre P de degré N, donc $\lambda = N(N+1)$. Donc $\lambda \in \{k(k+1), k \in \mathbb{N}\}$.
   Finalement, l'ensemble des valeurs propres de φ est $\{k(k+1), k \in \mathbb{N}\}$

10. On a bien $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$
    Par commutativité du produit de polynômes, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle Q, P\rangle = \langle P, Q\rangle$, donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique
    Par linéarité de l'intégrale, pour tout $(P, Q, R) \in \mathbb{R}[X]^3$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,
    $\langle \lambda P + \mu Q, R\rangle = \lambda \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)R(t)dt + \mu \int_{-1}^{1} Q(t)R(t)dt = \lambda\langle P, R\rangle + \mu\langle Q, R\rangle$;
    Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche, symétrique donc bilinéaire.
    Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $\langle P, P\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)^2(t)dt$ et $t \mapsto P(t)^2$ est positive, donc, par positivité de l'intégrale, $\langle P, P\rangle \geqslant 0$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive
    Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P, P\rangle = 0$
    $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)^2(t)dt = 0$ et $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive, donc, par stricte positivité de l'intégrale, la fonction $t \mapsto P(t)^2$ est nulle sur $[-1, 1]$.
    On en déduit que P admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie.
    Finalement, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
11. (a) Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.
    $\langle \varphi(P_n), P_m\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{d}{dt}((t^2-1)P_n'(t))P_m(t)dt$.
    On pose $u : t \mapsto (t^2-1)P_n'(t)dt$ et $v = P_m$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$. Par intégration par parties on obtient :
    $\langle \varphi(P_n), P_m\rangle = \left[(t^2-1)P_n'(t)P_m(t)dt\right]_{-1}^{1} - \displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2-1)P_n'(t)P_m'(t)dt = -\int_{-1}^{1} (t^2-1)P_n'(t)P_m'(t)dt$.
    m et n jouant des rôles symétriques, on a aussi $\langle \varphi(P_m), P_n\rangle = -\displaystyle\int_{-1}^{1} (t^2-1)P_n'(t)P_m'(t)dt = \langle \varphi(P_n), P_m\rangle$.
    Donc, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $\langle \varphi(P_n), P_m\rangle = \langle P_n, \varphi(P_m)\rangle$.
    (b) Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2, n \neq m$. $\varphi(P_n) = n(n+1)P_n$ et $\varphi(P_m) = m(m+1)P_m$.
    On en déduit que $\langle \varphi(P_n), P_m\rangle = \langle n(n+1)P_n, P_m\rangle = n(n+1)\langle P_n, P_m\rangle$

et $\langle \varphi(P_m), P_n\rangle = m(m+1)\langle P_n, P_m\rangle$.
Donc $(n(n+1)-m(m+1))\langle P_n, P_m\rangle = 0$ et pour $n \neq m$, $n(n+1)-m(m+1) \neq 0$.
D'où $\langle P_n, P_m\rangle = 0$
Finalement, $\langle P_n, P_m\rangle = 0$ pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2, n \neq m$.

12. (a) $U_n(X) = \left(X^2-1\right)^n = (X-1)^n(X+1)^n$. 1 et -1 sont les racines de U_n et ont chacune pour ordre de multiplicité n.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{P}_p$:« $\|P_n\|^2 = (-1)^p \left\langle U_n^{(n+p)}, U_n^{(n-p)}\right\rangle$ ou $p > n$.
Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $\mathcal{P}_p$ est vraie.
Initialisation : $\mathcal{P}_0$ est vraie par définition de P_n et de la norme.
Hypothèse de récurrence au rang p. On suppose que $\mathcal{P}_p$ vraie.
Au rang $p+1$: si $p \geqslant n$, $p+1 > n$ et $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.
Si $p < n$, par hypothèse de récurrence, $\|P_n\|^2 = (-1)^p \displaystyle\int_{-1}^{1} U_n^{(n+p)}(t)U_n^{(n-p)}(t)dt$.
On fait une intégration par parties en posant $u = U_n^{(n+p)}$ et $v = U_n^{(n-p-1)}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$. On obtient :
$\|P_n\|^2 = (-1)^p \left(\left[U_n^{(n+p)}(t)U_n^{(n-p-1)}(t)\right]_{-1}^{1} - \displaystyle\int_{-1}^{1} U_n^{(n+p+1)}(t)U_n^{(n-p-1)}(t)dt\right.$.
Or $n-p-1 \in [\![0, n-1]\!]$ et -1 et 1 sont des racines de U_n de multiplicité n, donc $U_n^{(n-p-1)}(1) = U_n^{(n-p-1)}(-1) = 0$.
Ainsi $\|P_n\|^2 = (-1)^{p+1} \displaystyle\int_{-1}^{1} U_n^{(n+p+1)}(t)U_n^{(n-p-1)}(t)dt$.
Donc $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie et la récurrence est établie. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_p$ est vraie.
Pour $p = n$, on obtient : $\|P_n\|^2 = (-1)^n \left\langle U_n^{(2n)}, U_n\right\rangle$.

(c) U_n est un polynôme unitaire de degré $2n$, $U_n^{(2n)}$ est donc un polynôme constant. On peut prouver par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(X^k)^{(k)} = k!$.
Ainsi, $U_n^{(2n)} = (2n)!$.

(d) $\|P_n\|^2 = (-1)^n \displaystyle\int_{-1}^{1} U_n^{(2n)}(t)U_n(t)dt = (-1)^n(2n)! \int_{-1}^{1} U_n(t)dt$
Ainsi, $\|P_n\|^2 = (-1)^n(2n)! \times (-1)^n \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$
D'où $\|P_n\| = 2^n n! \sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 11 (b), la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille orthogonale, de $n+1$ polynômes non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$, elle est donc libre.
C'est une famille libre de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$, c'est donc une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = \dfrac{P_n}{\|P_n\|} = \dfrac{\sqrt{2n+1}}{2^n!\sqrt{2}} P_n$.
La suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien solution du problème introduit au début de cette partie.

1. On fait l'hypothèse, car cela semble sous-entendu par l'énoncé, que chaque joueur parie sur une équipe avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Par définition de Y_k, $Y_k(\Omega) = \{0, 1\}$ et Y_k suit une loi de Bernoulli.
Notons A_k l'événement « le joueur k a parié sur l'équipe A »et A l'événement « l'équipe A gagne ».
$P(Y_k = 1) = P((A \cap A_k) \cup (\overline{A} \cap \overline{A_k})) = P((A \cap A_k) + P(\overline{A} \cap \overline{A_k}))$.
Or, par les hypothèses faites dans l'énoncé A et A_k, ainsi que $\overline{A}$ et $\overline{A_k}$ sont indépendants et ont chacun pour probabilité $\frac{1}{2}$.
Ainsi $P(Y_k = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

On en déduit $P(Y_k = 0) = 1 - P(Y_k = 1) = \frac{1}{2}$.
Donc, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
Les données de l'énoncé permettent de supposer que les variables aléatoires $(Y_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont indépendantes.
On peut soit admettre que l'on peut travailler sous cette hypothèse (c'est ce que le sujet semblait sous-entendre, mais ce n'est pas clairement dit), soit le justifier
Pour cela, calculons, $P(Y_1 = 1, .., Y_n = 1)$.
$P(Y_1 = 1, .., Y_n = 1) = P(A_1 \cap A_2 \cap .. \cap A_n \cap A) + P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap .. \cap \overline{A_n} \cap \overline{A})$.
Tous ces événements étant mutuellement indépendants et de probabilité $\frac{1}{2}$, on en déduit que
$P(Y_1 = 1, .., Y_n = 1) = \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2^n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} P(Y_k = 1)$.
On pourrait de même montrer que pour tout $\delta_k \in \{0, 1\}$
$P\left(\bigcap_{k=1}^n (Y_k = \delta_k)\right) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} P(Y_k = \delta_k)$.
Les variables aléatoires $(Y_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont bien indépendantes.
N est donc la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. N suit donc une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.
Ainsi, $N(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(N = i) = \binom{n}{i}\frac{1}{2^n}$.

2. S'il n'y a aucun gagnant, alors $S = 0$. S'il y a au moins un gagnant, alors $S = n$.
Ainsi $S(\Omega) = \{0, n\}$.
$P(S = 0) = P(N = 0) = \dfrac{1}{2^n}$ d'où $P(S = n) = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.
$\mathbf{E}(S) = 0P(S = 0) + nP(S = n) = n\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

3. $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, donc, par linéarité de l'espérance, $E(S) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$.
Les données de l'énoncé permettent de faire l'hypothèse que les X_k ont la même loi et donc la même espérance.
On en déduit que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $E(X_k) = \dfrac{1}{n}E(S) = 1 - \dfrac{1}{2^n}$

4. Si un nouvel ami arrive dans le groupe, la modélisation reste la même et l'espérance de gain devient $1 - \dfrac{1}{2^{n+1}} > 1 - \dfrac{1}{2^n}$.
Les joueurs ont donc intérêt à ce qu'il parie avec eux.

On fixe $k \in [\![1, n]\!]$ et on étudie la variable X_k.

5. $X_k = 0$ si et seulement le joueur k perd.
Donc $P(X_k = 0) = P(Y_k = 0) = \frac{1}{2}$.

6. (a) Si l'événement $Y_k = 1$ est réalisé, alors $N - 1 = \displaystyle\sum_{i=0, i \neq k}^{n} Y_i$.
Les variables aléatoires Y_i restent indépendantes et suivent une même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, donc $N - 1$ suit une loi binomiale de paramètres $n - 1$ et $\frac{1}{2}$.

(b) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Le gain du joueur k est $\dfrac{n}{i}$ si et seulement si il gagne et il y a i gagnants.
Ainsi, $\mathbf{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = P(Y_k = 1 \cap N = i) = P(Y_k = 1 \cap N - 1 = i - 1)$.
Donc $\mathbf{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = P(Y_k = 1)P_{Y_k=1}(N - 1 = i - 1) = \frac{1}{2} \times \binom{n-1}{i-1}\frac{1}{2^{n-1}}$.
Finalement, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,$\mathbf{P}\left(X_k = \frac{n}{i}\right) = \binom{n-1}{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

7. On en déduit que $E(X_k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} P\left(X = \frac{n}{i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} \binom{n-1}{i-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i}$

   $E(X_k) = \frac{1}{2^n} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} - 1 \right) = \frac{1}{2^n}(2^n - 1) = 1 - \frac{1}{2^n}$.

   On retrouve bien la valeur de $\mathbf{E}(X_k)$ calculée dans la partie précédente.

8. Soient $k, j \in [\![1, n]\!]$ avec $k \neq j$.
   L'événement $(X_k = n) \cap (X_j = n)$ est impossible, car si $X_k = n$, le joueur k est le seul gagnant et $X_j = 0$.
   On en déduit $P((X_k = n) \cap (X_j = n)) = 0$.
   De plus $P(X_k = n) = \frac{1}{2^n}$, donc $P(X_k = n)P(X_j = n) = \frac{1}{2^{2n}} \neq 0$.
   Donc $P(X_k = n)P(X_j = n) \neq P((X_k = n) \cap (X_j = n))$.
   Les variables X_j et X_k ne sont pas indépendantes

9. (a) Si $S = 0$, la somme rejouée est nulle, donc $T = 0$. Ainsi, $\mathbf{P}_{(S=0)}(T = 0) = 1$
   Si $S = n$, on est ramené à la situation du premier pari, $T = 0$ si et seulement si les n joueurs perdent.
   On en déduit $\mathbf{P}_{(S=n)}(T = 0) = \frac{1}{2^n}$.

   (b) $((S = 0), (S = n))$ forment un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités totales,
   $P(T = 0) = P(S = 0)P_{S=0}(T = 0) + P(S = n)P_{S=n}(T = 0) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.
   D'où $\mathbf{P}(T = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$
   De même, $P(T = n) = P(S = 0)P_{S=0}(T = n) + P(S = n)P_{S=n}(T = n)$ et $(S = 0)$ et $(T = n)$ sont incompatibles,
   D'où $P(T = n) = P(S = n)\left(1 - P_{S=n}(T = 0)\right)$
   Finalement, $\mathbf{P}(T = n) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$

   (c) $E(T) = nP(T = n) = n\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2$
   $V(T) = E(T^2) - E(T)^2 = n^2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 - n^2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^4$
   $V(T) = n^2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2 \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2\right) = n^2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2 \frac{1}{2^n}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right)$.

   (d) $\mathrm{Cov}(S, T) = E(ST) - E(S)E(T)$.
   La seule valeur non nulle que prend ST est n^2, obtenue si $S = T = n$.
   Donc $E(ST) = n^2 P(S = n, T = n) = n^2 P(T = n) = n^2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2$
   D'où $\mathrm{Cov}(S, T) = n^2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2 - n^2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^3$.
   $\mathrm{Cov}(S, T) = \frac{n^2}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2$.

10. $T = \sum_{k=1}^{n} Z_k$, donc, par linéarité de l'espérance, $E(T) = \sum_{k=1}^{n} E(Z_k)$.
   Les données de l'énoncé permettent de faire l'hypothèse que les Z_k ont la même loi et donc la même espérance.
   On en déduit que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $E(Z_k) = \frac{1}{n}E(T) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2$

11. $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2 < 1 - \frac{1}{2^n}$. Donc $E(Z_k) < E(X_k)$. Le joueur k n'a donc pas intérêt à parier sur ce deuxième match.

12. (a) Au cours de ce deuxième jeu, on peut avoir entre 0 et n joueurs, qui misent chacun un euro et U est la somme de leurs mises.
   On en déduit que le support de U est $[\![0, n]\!]$.

   (b) Soit $(i, j) \in N(\Omega) \times U(\Omega), j \neq 0, i \neq 0$.
   Si l'événement $N = i$ est réalisé, alors la somme des gains des joueurs est soit 0, soit i.
   Donc, puisque $j \neq 0$, si $j \neq i$, $\mathbf{P}_{(N=i)}(U = j) = 0$.
   Si $i = j$, $\mathbf{P}_{(N=i)}(U = j) = 1 - \mathbf{P}_{(N=i)}(U = 0) = 1 - \frac{1}{2^i}$

   (c) $(N = i))_{0 \leqslant i \leqslant n}$ forme un système complet d'événements, donc
   $P(U = 0) = \sum_{i=0}^{n} P_{N=i}(U = 0)P(N = i)$
   Or N suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.
   Donc $P(U = 0) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{i}\frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$
   Soit $j \in [\![1, n]\!]$. $P(U = j) = \sum_{i=0}^{n} P_{N=i}(U = j)P(N = i) = P(N = j)P_{N=j}(U = j) = \binom{n}{j}\frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^i}\right)$
   $E(U) = \sum_{i=0}^{n} iP(U = i) = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}\frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^i}\right)$
   Pour tout réel x, on pose $f(x) = (1 + x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = n(1 + x)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}x^{i-1}$
   On en déduit que $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}x^i = nx(1 + x)^{n-1}$.
   Ainsi, $E(U) = \frac{1}{2^n}n2^n - \frac{1}{2^n}n\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \frac{n}{2} - \frac{n}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

13. $U = \sum_{k=1}^{n} W_k$, donc, par linéarité de l'espérance, $E(U) = \sum_{k=1}^{n} E(W_k)$.
   Les données de l'énoncé permettent de faire l'hypothèse que les W_k ont la même loi et donc la même espérance.
   On en déduit que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $E(W_k) = \frac{1}{n}E(U) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n$

14. L'espérance de gain pour une mise de 1 étant strictement inférieure à $\frac{1}{2}$ et la probabilité de gagner étant $\frac{1}{2}$, le joueur k n'a pas intérêt à parier sur ce deuxième match.