Épreuve de mathématiques C

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

À rendre avec la copie 1 feuille de papier millimétré.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, **la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les questions non correctement référencées ne seront pas notées. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

CONSIGNES

— Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.

— L'usage de stylo à friction, stylo plume, stylo feutre, liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

— Remplir sur chaque copie en MAJUSCULES toutes vos informations d'identification : nom, prénom, numéro inscription, date de naissance, le libellé du concours, le libellé de l'épreuve et la session.

— Une feuille, dont l'entête n'a pas été intégralement renseigné, ne sera pas prise en compte.

— Il est interdit aux candidats de signer leur composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Tournez la page S.V.P

Préambule

1. Etudier la convergence des intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$$

2. Enoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales généralisées.
3. Comparer (sans les calculer)

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}$$

   (On pourra utiliser le changement de variable $\frac{1}{t} = x$.)

Partie I

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_h$ de la fonction h qui, à tout réel t de $\mathcal{D}_h$, associe :

$$h(t) = \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 + 1 - \sqrt{2}t}$$

2. Soit X un réel positif. Calculer $\displaystyle\int_0^X h(t)dt$ puis, à l'aide de ce résultat, $\displaystyle\int_X^0 h(-t)dt$.
3. Que vaut :

$$\lim_{X\to+\infty} \int_0^X (h(t) + h(-t))dt \quad ?$$

4. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction φ qui, à tout réel t, associe :

$$\varphi(t) = \frac{2}{2\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}$$

5. On considère la fonction g qui, à tout réel t de son domaine de définition $\mathcal{D}_g$, associe :

$$g(t) = \frac{\sqrt{2}}{t^2 + 1 - \sqrt{2}t}$$

   Montrer que $\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_h$, puis déterminer une primitive G de g sur $\mathcal{D}_g$.
6. Utiliser la primitive de g obtenue lors du calcul de la question précédente pour calculer simplement, pour tout réel positif X :

$$\int_0^X g(-t)dt$$

7. Déterminer :

$$\lim_{X\to+\infty} \int_0^X (g(t) + g(-t))dt$$

8. Calculer, pour tout réel $t \geq 0$:

$$h(t) + h(-t) + g(t) + g(-t)$$

9. (a) Que vaut :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1} dt \quad ?$$

(b) Déduire des questions précédentes et du Préambule la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}$$

10. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^2}{t^4+1} dt$. On donnera la réponse en fonction de Arctan 2 et $\ln(5)$.

Partie II

1. Dans cette question, C et S désignent deux fonctions à valeurs réelles, paires, définies sur un intervalle de la forme $]-R, R[$, où R est soit un réel strictement positif, soit $+\infty$.
On considère les équations différentielles suivantes :

$$\forall x \in]-R, R\left[: \quad C'(x) = -2xS(x)\right.$$

et

$$\forall x \in]-R, R\left[: \quad S'(x) = 2xC(x)\right.$$

avec les conditions initiales

$$C(0) = 1 \quad \text{et} \quad S(0) = 0$$

Le but de cette question est de déterminer les expressions des fonctions C et S, en recherchant leur développement en série entière sur $]-R, R[$.

(a) Pour tout réel x de $]-R, R[$, on pose :

$$C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$(n+1)a_{n+1} = -2b_{n-1} \quad \text{et} \quad (n+1)b_{n+1} = 2a_{n-1}$$

(b) En déduire, pour tout entier naturel $n \geq 4$:

$$a_n = -\frac{4}{n(n-2)} a_{n-4}$$

(c) On rappelle que les fonctions C et S sont supposées paires. Que peut-on en déduire pour les coefficients de leurs développement en série entière respectifs ?

(d) i. Montrer que tout entier naturel n peut s'écrire sous l'une des formes suivantes

$$n = 4p \quad \text{ou} \quad n = 4p+1 \quad \text{ou} \quad n = 4p+2 \quad \text{ou} \quad n = 4p+3$$

où p est dans $\mathbb{N}$.

ii. Montrer que, pour tout entier naturel n qui n'est pas multiple de 4 :

$$a_n = 0$$

(e) Montrer que, pour tout entier naturel p :

$$a_{4p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!}$$

(f) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ et donner, pour tout réel x de $]-R, R[$, une expression simplifiée de $C(x)$, puis de $S(x)$.

2. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}$.

(a) Préciser le rayon de convergence R' de cette série entière, puis, pour tout réel x de $]-R', R'[$, exprimer la somme $D(x)$ de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}$ en fonction de x.

(b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{1+x^4}$ peut s'exprimer comme la somme d'une série numérique, que l'on explicitera.

(c) Que vaut :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(4n+1)} \quad ?$$

Partie III

Pour tout réel $X > 0$, on pose :

$$I(X) = \int_1^X \cos\left(t^2\right) dt \quad , \quad J(X) = \int_1^X \sin\left(t^2\right) dt$$

1. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

On donne, pour la suite du problème :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2. Etudier la convergence des intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(t^2\right)}{t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\cos\left(t^2\right)}{t^2} dt$$

3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que les limites

$$\lim_{X \to +\infty} I(X) \text{ et } \lim_{X \to +\infty} J(X)$$

existent et sont finies.

4. Montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} e^{it^2} dt$$

5. Donner le développement en série entière de la fonction

$$t \mapsto e^{it^2}$$

6. (a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f :

$$x \mapsto f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} dt$$

   (b) Montrer que, pour tout réel strictement positif x :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$$

   (c) Déduire de la question précédente la valeur de :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

   (d) Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^\star$ de la fonction f introduite à la question 6. (a) (pour cela, on se placera sur un intervalle de la forme $[\varepsilon, a]$, où ε et a sont deux réels strictement positifs tels que $\varepsilon \leq a$).

   (e) Montrer que, pour tout réel strictement positif x :

$$f'(x) = -\sqrt{\pi} e^{-ix^2}$$

   (f) En déduire, à l'aide des résultats de la Partie I, la valeur de

$$\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx$$

   puis de

$$\int_0^{+\infty} C(x)dx \text{ et } \int_0^{+\infty} S(x)dx$$

   où S et C sont les fonctions introduites au début de la Partie II.

Dans ce problème, on calcule, à l'aide d'intégrales généralisées, la valeur de l'intégrale (complexe) $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx$*, connue comme l'expression complexe des intégrales (réelles) de Fresnel, qui interviennent dans les phénomènes de diffraction. La somme pour toutes les valeurs de* x *peut s'interpréter intuitivement (et de façon très simplifiée) comme le fait qu'à chaque fois qu'une onde lumineuse se propage, une infinité de rayons sont à prendre en compte – et on somme les effets de cette infinité de rayons, en lien avec le principe de superposition de Huygens-Fresnel, en physique.*

Fin de l'énoncé