Proposition de corrigé : Banque PT – Épreuve C – 2025

Préambule

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^4+1}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$\frac{1}{t^4+1} \leqslant \frac{1}{t^4}.$$
Or $\int_1^{+\infty} dt/t^4$ converge comme intégrale de Riemann donc, par théorème de comparaison par les fonction positives, l'intégrale $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} \text{ est convergente}}$. Le raisonnement est analogue pour la seconde intégrale en majorant parla fonction $t \mapsto 1/t^2$.
2. On donne le théorème demandé : étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.
3. On utilise le théorème de la question précédente dans le cas où la fonction est décroissante. Le fonction $\varphi t \mapsto \frac{1}{t}$ réalise une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même strictement décroissante. Comme $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}$ est convergente, $\int_0^{+\infty} \frac{\varphi'(t)dt}{\varphi(t)^4+1}$ est également convergente et on a :
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} = -\int_0^{+\infty} \frac{\varphi'(t)dt}{\varphi(t)^4+1} = -\int_0^{+\infty} -\frac{1}{t^2}\frac{dt}{1/t^4+1} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$$
donc on obtient :
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt}.$$

Partie I

1. La fonction h, en tant que quotient de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ car polynomiales, est définie lorsque son dénominateur ne s'annule pas. Or le dénominateur est un trinôme du second degré dont le discriminant vérifie l'inégalité : $(-\sqrt{2})^2 - 4\times 1\times 1 = -2 < 0$. Ainsi, le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{h \text{ est définie sur } \mathcal{D}_h = \mathbb{R}}$.

2. Soit X un réel positif. En tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, h est continue sur $\mathbb{R}$ et, compte-tenu de la forme de h, on a directement :
$$\int_0^X h(t)dt = \left[\ln\left(t^2+1-\sqrt{2}t\right)\right]_0^X = \ln\left(X^2+1-\sqrt{2}X\right)$$
qui donne, en changeant de variable $u = -x$ sur un segment :
$$\boxed{\int_X^0 h(-t)dt = \int_0^{-X} h(u)du = \ln\left(X^2+1+\sqrt{2}X\right)}.$$

3. Soit X un réel positif. On utilise les deux questions précédentes pour obtenir :
$$\int_0^X (h(t)+h(-t))dt = \int_0^X h(t)dt + \int_0^X h(-t)dt = \ln\left(\frac{X^2+1-\sqrt{2}X}{X^2+1+\sqrt{2}X}\right).$$
Avec des équivalent, $\frac{X^2+1-\sqrt{2}X}{X^2+1+\sqrt{2}X} \underset{x\mapsto+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc, par composition :
$$\boxed{\int_0^X (h(t)+h(-t))dt \underset{x\mapsto+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

4. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. En écrivant
$$\varphi : t \mapsto \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}t-1)^2},$$
une primitive de φ sur $\mathbb{R}$ est :
$$\boxed{\Phi : t \mapsto \sqrt{2}\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}t-1)}.$$

5. Comme dans la question 1 de la partie I, g est un quotient dont le dénominateur est le même que h donc g est définie sur $\boxed{\mathcal{D}_g = \mathcal{D}_h = \mathbb{R}}$ et elle est continue sur cet ensemble comme la fonction h. Comme $g = \sqrt{2}\varphi$, on a directement une primitive de g sur $\mathbb{R}$:
$$\boxed{G : t \mapsto 2\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}t-1)}.$$

6. On a directement, compte-tenu de l'expression de g, pour tout réel positif X :
$$\int_0^X g(-t)dt = -\int_0^{-X} g(u)du = -\left[2\arctan(\sqrt{2}t-1)\right]_0^{-X}$$
donc
$$\boxed{\int_0^X g(-t)dt = 2\arctan(\sqrt{2}X+1) - \frac{\pi}{2}}.$$

7. On a, pour tout réel X positif, comme précédemment :
$$\int_0^X \big(g(t)+g(-t)\big)dt = 2\arctan(\sqrt{2}X-1) + \frac{\pi}{2} + 2\arctan(\sqrt{2}X+1) - \frac{\pi}{2}$$
donc, par composition et somme, comme la fonction Arctan tend vers $\pi/2$ en $+\infty$:
$$\boxed{\int_0^X \big(g(t)+g(-t)\big)dt \underset{x\mapsto+\infty}{\longrightarrow} 2\pi}.$$

8. Pour tout réel positif t, les fonctions étant définies sur $\mathbb{R}$:
$$h(t)+h(-t)+g(t)+g(-t) = \frac{2t-\sqrt{2}}{t^2+1-\sqrt{2}t} - \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+1+\sqrt{2}t} + \frac{\sqrt{2}}{t^2+1-\sqrt{2}t} + \frac{\sqrt{2}}{t^2+1+\sqrt{2}t}$$
donc
$$h(t)+h(-t)+g(t)+g(-t) = \frac{2t}{t^2+1-\sqrt{2}t} - \frac{2t}{t^2+1+\sqrt{2}t} = 2t\frac{t^2+1+\sqrt{2}t-(t^2+1-\sqrt{2}t)}{(t^2+1-\sqrt{2}t)\,(t^2+1+\sqrt{2}t)}$$
ce qui s'écrit finalement :
$$\boxed{h(t)+h(-t)+g(t)+g(-t) = 4\sqrt{2}\frac{t^2}{t^4+1}}.$$

9. (a) Par définition d'une intégrale généralisée :
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt = \lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{t^2}{t^4+1}dt.$$
Or, avec la question précédente et la linéarité de l'intégrale, pour tout réel positif X :
$$\int_0^X \frac{t^2}{t^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^X \big(h(t)+h(-t)\big)dt + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^X \big(g(t)+g(-t)\big)dt.$$
On utilise finalement les limites des questions 3 et 7 de la partie I pour obtenir, par somme :
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt = \frac{1}{4\sqrt{2}} \times 2\pi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}.$$

(b) Avec les questions du Préambule, on a directement :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1} dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}.$$

10. On utilise finalement les calculs des questions 3 et 7 de la partie I pour obtenir :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^2}{t^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \big(h(t)+h(-t)\big)dt + \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \big(g(t)+g(-t)\big)dt.$$

puis

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^2}{t^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{1/2+1-1}{1/2+1+1}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(0) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(1+1)$$

et finalement

$$\boxed{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{t^2}{t^4+1} dt = \frac{2\arctan 2 - \ln 5}{4\sqrt{2}}}.$$

Partie II

1. (a) Par le théorème de dérivation terme à terme, les fonction C et S sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et, pour tout $x \in]-R,R[$, on a :

$$C'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n \quad \text{et} \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)b_{n+1}x^n$$

ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = -2xS(x) = -2\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+1} = -2\sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1}x^n$$

donc, par unicité du développement en série entière, on obtient la première relation : pour tout entier n non nul, $\boxed{(n+1)a_{n+1} = -2b_{n-1}}$. La seconde relation résulte d'un raisonnement analogue.

(b) Avec les relations de la question précédente, pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :

$$a_{n+1} = -\frac{2}{n+1}b_{n-1} = -\frac{2}{n+1}\frac{2}{n-1}a_{n-3} = -\frac{4}{(n+1)(n-1)}a_{n-3}$$

ce qui s'écrit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 4, \quad a_n = -\frac{4}{n(n-2)}a_{n-4}}.$$

(c) Cette hypothèse permet de déduire que $\boxed{\text{tous les coefficients d'indice impair sont nuls}}$.

(d) i. Lorsque n est un entier naturel, son reste de la division euclidienne par 4 est 0, 1, 2 ou 3 donc, si r désigne ce reste, $4 \mid n-r$ ce qui signifie qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\boxed{n = 4p+r}$ où $r \in [\![0,3]\!]$.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. S'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4p+1$ ou $n = 4p+3$, n est impair donc $a_n = 0$. On suppose maintenant qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4p+2$. On a la relation

$$a_{4p+2} = \frac{-4}{(4p+3)(4p+1)}a_{4(p-1)+2}.$$

Or $0 = S(0) = b_0$ donc $a_2 = -b_0 = 0$ avec les relations des questions précédentes. Ainsi, par récurrence immédiate, $a_{4p+2} = 0$. Finalement, $\boxed{\text{si } 4 \text{ ne divise pas } n,\ a_n = 0}$.

(e) On prouve le résultat par récurrence. On a $a_0 = C(0) = 1 = (-1)^0/0!$. Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$a_{4p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!}.$$

On a

$$a_{4(p+1)} = a_{4p+4} = \frac{-4}{(4p+4)(4p+2)}a_{4p} = \frac{-4}{(4p+4)(4p+2)} \times \frac{(-1)^p}{(2p)!} = \frac{-1}{(2p+2)(2p+1)} \times \frac{(-1)^p}{(2p)!}$$

ce qui s'écrit

$$a_{4(p+1)} = \frac{(-1)^{p+1}}{(2(p+1))!}$$

et achève la récurrence. Finalement, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{a_{4p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!}}.$$

(f) Soit z un complexe non nul. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\frac{a_{4(p+1)}z^{4(p+1)}}{a_{4p}z^{4p}}\right| = \frac{4}{(4p+4)(4p+2)}|z|^4$$

qui tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$. Ainsi, par le critère de d'Alembert (les cas $z=0$ étant évident), la série $\sum a_{4p}z^{4p}$ est absolument convergente pour tout complexe z. Par suite $\boxed{R = +\infty}$.
On obtient ainsi, pour tout réel x :

$$C(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{4p}x^{4p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!}\left(x^2\right)^{2p} = \cos(x^2)$$

et de même, lorsque x est non nul :

$$S(x) = -\frac{1}{2x}C'(x) = \frac{1}{2x}2x\sin(x^2).$$

qui est aussi vrai si x est nul. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{C(x) = \cos(x^2) \quad \text{et} \quad S(x) = \sin(x^2)}.$$

2. (a) La série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^{4n}$ s'écrit aussi $\sum_{n\geqslant 0}(-x^4)^n$. C'est une série géométrique de raison $-x^4$. Elle converge si et seulement si la valeur absolue de sa raison est strictement inférieure à 1. Or :

$$|-x^4| < 1 \iff |x|^4 < 1 \iff |x| < 1$$

donc la série converge si et seulement si $|x| < 1$.
$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière est donc 1}}$.
Pour tout $x \in]-1;1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-x^4\right)^n = \boxed{\frac{1}{1+x^4}}.$$

(b)

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1+x^4}dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} dx.$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^4}$ est bien continue sur $\left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto (-1)^n x^{4n}$ est intégrable sur le segment $\left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, car continue.
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} |(-1)^n x^{4n}| dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^{4n} dx = \left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{(\sqrt{2})^{4n+1}(4n+1)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{\left((\sqrt{2})^4\right)^n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{4^n}\right)$$

et $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{4^n}$ converge (c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{4}\in]-1,1[$) donc on peut intervertir série et intégrale :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1+x^4}dx\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-1)^n x^{4n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(\sqrt{2})^{4n+1}(4n+1)}$$

d'où

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1+x^4}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(-1)^n}{((\sqrt{2})^4)^n(4n+1)}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(4n+1)}}.$$

(c) On a d'après la question précédente :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(4n+1)}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1+x^4}dx.$$

Il reste à calculer cette intégrale.

En effectuant comme dans la partie I le changement de variable $x=\frac{1}{t}$, on a $dx=-\frac{1}{t^2}dt$ et donc :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1+x^4}dx=-\int_{+\infty}^{\sqrt{2}}\frac{1}{1+\frac{1}{t^4}}\cdot\frac{1}{t^2}dt=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt.$$

Or, en reprenant les notations de la partie I, pour tout $X\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_{\sqrt{2}}^{X}\frac{t^2}{1+t^4}dt\\
=&\int_{\sqrt{2}}^{X}\frac{1}{4\sqrt{2}}(h(t)+h(-t)+g(t)+g(-t))dt\\
=&\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ln(t^2+1-\sqrt{2}t)-\ln(t^2+1+\sqrt{2}t)\right]_{\sqrt{2}}^{X}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[2\arctan(\sqrt{2}t-1)-2\arctan(-\sqrt{2}t-1)\right]_{\sqrt{2}}^{X}\\
=&\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ln\left(\frac{t^2+1-\sqrt{2}t}{t^2+1+\sqrt{2}t}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{X}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[2\arctan(\sqrt{2}t-1)-2\arctan(-\sqrt{2}t-1)\right]_{\sqrt{2}}^{X}\\
=&\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{X^2+1-\sqrt{2}X}{X^2+1+\sqrt{2}X}\right)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}X-1)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(-\sqrt{2}X-1)\\
&-2\arctan(1)+2\arctan(-3)
\end{aligned}$$

Quand X tend vers $+\infty$, la limite de l'expression précédente est :

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(0+\ln 5+2\cdot\frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{\pi}{4}-2\arctan(3)\right)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln 5+\frac{3\pi}{2}-2\arctan 3\right).$$

La valeur cherchée est donc $\boxed{\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln 5+\frac{3\pi}{2}-2\arctan 3\right)}$.

1. Soit $t\in R$ et $u=t^2$. On a $t^2e^{-t^2}=ue^{-u}\underset{u\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par croissances comparées.

   Donc $t^2e^{-t^2}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc $e^{-t^2}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

   Donc $\boxed{\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt \text{ converge}}$.

2. Pour tout $t\in[1;+\infty[$:

$$\left|\frac{\sin(t^2)}{t^2}\right|\leqslant\frac{1}{t^2}\quad\text{er}\quad\left|\frac{\cos(t^2)}{t^2}\right|\leqslant\frac{1}{t^2}$$

donc ces intégrales convergent.

3. Soit $X\in\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\int_1^X\cos(t^2)\,dt&=\frac{1}{2}\int_1^X\frac{1}{t}2t\cos(t^2)dt\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t}\left(\sin(t^2)\right)\right]_1^X-\frac{1}{2}\int_1^X\left(-\frac{1}{t^2}\sin(t^2)\right)dt\\
&=\underbrace{\frac{1}{2X}\sin(X^2)}_{\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}0}-\underbrace{\frac{1}{2}\sin(1)}_{\text{constante}}+\underbrace{\frac{1}{2}\int_1^X\frac{1}{t^2}\sin(t^2)dt}_{\text{converge quand } X\to+\infty \text{ d'après Q2.}}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\lim_{X\to+\infty}I(X)\text{ existe et est finie}}$.

Le raisonnement est en tout point similaire pour $J(x)$:

$$\begin{aligned}
\int_1^X\sin(t^2)\,dt&=\frac{1}{2}\int_1^X\frac{1}{t}2t\sin(t^2)dt\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t}\left(-\cos(t^2)\right)\right]_1^X-\frac{1}{2}\int_1^X\left(\frac{1}{t^2}\cos(t^2)\right)dt\\
&=\underbrace{-\frac{1}{2X}\cos(X^2)}_{\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}0}+\underbrace{\frac{1}{2}\cos(1)}_{\text{constante}}-\underbrace{\frac{1}{2}\int_1^X\frac{1}{t^2}\cos(t^2)dt}_{\text{converge quand } X\to+\infty \text{ d'après Q2.}}
\end{aligned}$$

3. Soit $X\in\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\int_1^X e^{it^2}dt&=\int_1^X\left(\cos(t^2)+i\sin(t^2)\right)dt\\
&=\int_1^X\cos(t^2)\,dt+i\int_1^X\sin(t^2)\,dt=I(x)+iJ(x).
\end{aligned}$$

D'après la question 3, on en déduit que $\int_1^X e^{it^2}dt$ a une limite finie quand $X\to+\infty$, donc $\boxed{\int_1^{+\infty}e^{it^2}dt\text{ converge}}$.

4. On sait que pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\exp(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

   On en déduit que pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{e^{it^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(it^2\right)^n}{n!}}.$$

5. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $t\mapsto\frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}$ est continue sur $[0;+\infty[$ comme quotient, composée et somme de fonctions continues. Il reste à étudier la convergence de l'intégrale en $+\infty$. Pour tout $t\geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i}\right|&=\frac{e^{-t^2x^2}}{|t^2+i|}\\
&\leqslant\frac{e^{-t^2x^2}}{t^2}\\
&\leqslant\frac{1}{t^2}
\end{aligned}$$

   donc l'intégrale converge en $+\infty$. On en déduit que $\boxed{f\text{ est définie sur }\mathbb{R}}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$ strictement positif. On effectue le changement de variable C^1 et strictement monotone :

$$u = tx.$$

Alors $du = xdt$ et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}xdt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du.$$

Or on a admis dans l'énoncé que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On obtient donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}}.$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \left|\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\left(t^2+i\right)x^2}}{t^2+i}\right| \\
&\leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{e^{-t^2x^2}e^{-ix^2}}{t^2+i}\right| dt \\
&\leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2x^2}}{\sqrt{1+t^4}}dt \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}dt \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2x}.
\end{aligned}$$

Donc par encadrement,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

(d) Soit $\varepsilon, a \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\varepsilon \leq a$.
On sait que :

— Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \frac{e^{-\left(t^2+i\right)x^2}}{t^2+i}$ est C^1 comme quotient, composée, somme de fonctions C^1, et sa dérivée est $x \mapsto -2xe^{-\left(t^2+i\right)x^2}$;

— pour tout $x \in [\varepsilon; a]$, $t \mapsto \frac{e^{-\left(t^2+i\right)x^2}}{t^2+i}$ est intégrable (question 6a) ;

— pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto -2xe^{-\left(t^2+i\right)x^2}$ est continue sur $[\varepsilon; a]$.

De plus, pour tout $x \in [\varepsilon; a]$:

$$\begin{aligned}
\left|-2xe^{-\left(t^2+i\right)x^2}\right| &= |2x|\left|e^{-t^2x^2}\right| \\
&\leqslant 2a \cdot e^{-t^2\varepsilon^2}
\end{aligned}$$

De plus, $t \longrightarrow 2ae^{-t^2\varepsilon^2}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ car $2ae^{-t^2\varepsilon^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, f est dérivable sur $[\varepsilon; a]$.

Comme cela est vrai pour tous $\varepsilon, a \in \mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$.

(e) On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_0^{+\infty} -2xe^{-\left(t^2+i\right)x^2}dt \\
&= -2xe^{-ix^2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2x^2}dt = -2xe^{-ix^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2x} = \boxed{-\sqrt{\pi}e^{-ix^2}}.
\end{aligned}$$

(f) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrons qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$. On sait que :

— pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-\left(t^2+i\right)x^2}}{t^2+i}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues ;

— pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-\left(t^2+i\right)x^2}}{t^2+i}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme composée, somme et quotient de fonctions continues.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{e^{-\left(t^2+i\right)x^2}}{t^2+i}\right| \leq \frac{1}{|t^2+i|} = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Or $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ donc $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

On en déduit, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, que $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f'(x) = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \boxed{-\sqrt{\pi}}.$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, on en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+}$, et l'égalité $f'(x) = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2}$ reste valable pour $x = 0$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, il existe donc une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = -\sqrt{\pi}\int_0^x e^{-it^2}dt + c.$$

Or :

$$\begin{aligned}
f(0) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+i}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{t^2-i}{(t^2-i)(t^2+i)}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{t^2-i}{t^4+1}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+1} - i\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^4+1}dt \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - i\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-i)
\end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = -\sqrt{\pi}\int_0^x e^{-it^2}dx + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1-i)$$

donc

$$\int_0^x e^{-it^2}dt = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}f(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i).$$

De plus, d'après la question 6c, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$\int_0^{+\infty} e^{-it^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-i).$$

On en déduit :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt - i\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

et en identifiant les parties réelles et les parties imaginaires :

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} C(t)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} S(t)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}.$$