Proposition de corrigé du DM3

Exercice 1

1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2\,a_n b_n}{a_n + b_n} = \frac{(a_n+b_n)^2 - 4a_nb_n}{2(a_n+b_n)} = \frac{a_n^2 + b_n^2 - 2a_nb_n}{2(a_n+b_n)} = \frac{(a_n-b_n)^2}{2(a_n+b_n)}.$$
2. On obtient donc, avec la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n - b_n = \dfrac{(a_{n-1}-b_{n-1})^2}{2(a_{n-1}+b_{n-1})} \geqslant 0$ et $a_0 \geqslant b_0$ donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant b_n}$.
3. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $a_n \geqslant b_n$,
$$a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \leqslant 0 \quad \text{et} \quad b_{n+1} - b_n = \frac{2\,a_nb_n}{a_n+b_n} - b_n = \frac{2\,a_nb_n - b_n(a_n+b_n)}{a_n+b_n} = \frac{b_n(a_n-b_n)}{a_n+b_n} \geqslant 0$$
donc $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante et } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ croissante}}$.
4. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0) donc, par le théorème de la limite monotone, elle est convergente. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (décroissance de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$), $a_0 \geqslant a_n \geqslant b_n$ donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par a_0 : la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente par le théorème de la limite monotone. Notons λ et λ' les limites respectives de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a, comme $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
$$a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$$
puis, en passant à la limite dans l'égalité, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2},$$
on obtient
$$\lambda = \frac{\lambda+\lambda'}{2},$$
puis $\lambda = \lambda'$. De plus, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{b_n+a_n}{2}\,\frac{2\,a_nb_n}{a_n+b_n} = a_nb_n$$
donc la suite $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_nb_n = a_0b_0 = ab$$
ce qui donne, en passant à la limite, $\lambda^2 = ab$ puis, par positivité de λ, $\boxed{\lambda = \sqrt{ab}}$.
5. Avec la question précédente, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{\lambda^2}{a_n}$ donc
$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{a_n + \frac{\lambda^2}{a_n}}{2} = \frac{a_n^2+\lambda^2}{2a_n}$$
ce qui donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1} - \lambda = \frac{a_n^2+\lambda^2}{2a_n} - \lambda = \frac{a_n^2 - 2\lambda a_n + \lambda^2}{2a_n} = \frac{(a_n-\lambda)^2}{2a_n}.$$
De la même manière, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1} + \lambda = \frac{a_n^2+\lambda^2}{2a_n} + \lambda = \frac{a_n^2 + 2\lambda a_n + \lambda^2}{2a_n} = \frac{(a_n+\lambda)^2}{2a_n}.$$

6. On obtient, par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{a_n-\lambda}{a_n+\lambda} = \left(\frac{a_{n-1}-\lambda}{a_{n-1}+\lambda}\right)^2 = \cdots = \left(\frac{a_0-\lambda}{a_0+\lambda}\right)^{2^n}$$
ce qui donne, comme $\lambda \neq 0$,
$$\frac{a_n-\lambda}{a_n+\lambda} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_n-\lambda}{2\lambda}$$
et enfin
$$\boxed{a_n - \lambda \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\lambda\left(\frac{a_0-\lambda}{a_0+\lambda}\right)^{2^n}}.$$

Exercice 2

1. Comme la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ et vaut 1 uniquement en 0, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus (limite d'un taux d'accroissement), f tend vers 1 en 0.
$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est prolongeable en une fonction continue sur } \mathbb{R}}$ qu'on notera à nouveau f.
2. Comme la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vaut 1 uniquement en 0, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. On effectue un développement limité de f en 0. On a :
$$f(x) \underset{x\to0}{=} \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \underset{x\to0}{=} \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + o(x)} \underset{x\to0}{=} 1 - \frac{x}{2} + o(x).$$
Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
$$f'(x) = \frac{(1-x)\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x-1)^2} = \frac{g(x)}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$$
où $g : x \mapsto (1-x)\mathrm{e}^x - 1$ dont la dérivée $g' : x \mapsto -x\mathrm{e}^x$ est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$. g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et $g(0) = 0$. Donc g est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$ et f y est strictement décroissante.
On a $f(0) = 1$ et, par croissance comparée,
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\mathrm{e}^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$$1 = f(0) \geqslant f(x) > 0.$$
$\boxed{\text{En conclusion } f \text{ et minorée par 0 et majorée par 1 sur } \mathbb{R}^+.}$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-nx}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et positive. De plus, avec la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
$$0 \leqslant f(x)\mathrm{e}^{-nx} \leqslant \mathrm{e}^{-nx}.$$
Or, en tant qu'intégrale de référence, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ est convergente. Ainsi, par théorème de comparaison pour les intégrales généralisées, K_n converge. De plus, par croissance de l'intégrale, on a :
$$\boxed{0 \leqslant K_n \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}}.$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a, avec la formule de la somme géométrique (puisque $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$) :
$$f(x)\mathrm{e}^{-nx} + \sum_{k=1}^{n} x\mathrm{e}^{-kx} = \frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{e}^{-nx} + x\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{e}^{-nx}-1}{\mathrm{e}^{-x}-1} = \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1} + x\frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{\mathrm{e}^x-1} = \frac{x}{\mathrm{e}^x-1} = f(x)$$
et, lorsque $x = 0$, $f(x) = 1 = f(x)\exp(-n\times0) + 0$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\boxed{f(x) = f(x)\mathrm{e}^{-nx} + \sum_{k=1}^{n} x\mathrm{e}^{-kx}}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a, lorsque $y \in \mathbb{R}_+$, en intégrant par parties, $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto -\frac{1}{k}e^{kx}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\int_0^y x\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x}{k}\mathrm{e}^{-kx}\right]_{x=0}^y + \frac{1}{k}\int_0^y \mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x = -\frac{y}{k}\mathrm{e}^{-ky} + \frac{1}{k}\int_0^y \mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x.$$

Or, $-\frac{y}{k}\mathrm{e}^{-ky}$ tend vers 0 lorsque y tend vers $+\infty$ et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$, donc $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x$ est convergente et on a :

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k^2}.$$

Par linéarité, f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et on a :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = K_n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

Or, par théorème d'encadrement, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ce qui donne, par somme :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}}.$$

Problème

Partie I : Un exemple

1. En calculant, on a :

$$\boxed{M^3 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -M}.$$

2. La deux premières colonnes de g sont opposées et les deux dernières ne sont pas colinéaires donc $\boxed{g \text{ est de rang } 2}$. Avec le théorème du rang, on obtient le fait que son noyau est de dimension 1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences :

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} g \iff \begin{cases} x - y + z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \\ -2x + 2y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

ce qui fournit un système d'équation linéaires pour $\operatorname{Ker} g$ et

$$\boxed{\operatorname{Ker} g = \operatorname{Vect}\big((1,1,0)\big)}.$$

3. Comme $M^3 + M$ est nulle, $g^3 + g$ est l'application nulle. Ainsi, si $u \in V = \operatorname{Ker}(g^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$, on a

$$(g^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})\big(g(u)\big) = (g^3 + g)(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

donc $g(u) \in \operatorname{Ker}(g^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. Ainsi, $\boxed{V \text{ est stable par } g}$.

4. On a

$$M^2 + I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences :

$$(x,y,z) \in V \iff \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff x + y + z = 0$$

Ainsi, V est de dimension 2 (c'est un plan) et, par exemple, le vecteur $\boxed{u = (1, -1, 0) \text{ est un vecteur de } \operatorname{Ker}(g^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = V}$. On a $g(u) = (1, 1, -2)$. Ainsi $\mathscr{V} = \big(u, g(u)\big)$ est (vecteurs non colinéaires) une famille libre de V qui est de dimension 2 : $\boxed{\text{c'est une base de } V}$.

5. On a $g^2(u) = -u$ donc la matrice de $\widetilde{g}$ dans la base $\mathscr{V}$ est :

$$\boxed{\widetilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

6. On pose $\mathscr{B} = \big((1,1,0), u, g(u)\big)$. On peut montrer que $\mathscr{B}$ est libre donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. On pose P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathscr{B}$. On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Comme $(1, 1, 0) \in \operatorname{Ker} g$, par la formule de changement de base, on a :

$$\boxed{P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Partie II : Cas général

7. On a $\det(A^3) = \det(A)^3$ et, comme A est de taille 3, $\det(-A) = -\det(A)$ donc, en utilisant l'égalité précédente, $\det(A)^3 + \det(A) = 0$ ce qui s'écrit $\big(\det(A)^2 + 1\big)\det(A) = 0$ puis $\boxed{\det(A) = 0}$.

8. Supposons que A est diagonale. Soient $\lambda_l, \lambda_2, \lambda_3$ ses coefficients diagonaux.
$A^3 + A = 0$, donc $\forall i \in [\![1, 3]\!], \lambda_i(\lambda_i^2 + 1) = 0$, donc $\lambda_i = 0$ et A est nulle.
$\boxed{\text{Si } A \text{ est diagonale alors } A \text{ est nulle.}}$

Dans la suite, on suppose que A est non nulle.

9. Soit $u \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$. On a $f(u) = 0_{\mathbb{R}_3}$ donc $f^2(u) = 0_{\mathbb{R}_3}$. Or $f^2(u) = -u$. Ainsi $u = 0_{\mathbb{R}_3}$. On a obtenu $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
Soit $v \in \mathbb{R}_3$. On pose $v_1 = v + f^2(v)$ et $v_2 = -f^2(v)$. On a $v = v_1 + v_2$ et $f(v_1) = f(v) + f^3(v) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(v_2) = (f^3 + f)\big(-f(v)\big) = 0_{\mathbb{R}^3}$ car $A^3 + A$ est la matrice nulle. Ainsi, $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
En conclusion :

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})}.$$

10. Si $\operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ alors $\operatorname{Ker} f = \mathbb{R}^3$ puis f serait nulle ce qui est faux car A est non nulle.
Ainsi $\boxed{\operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}}$.

11. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ un vecteur non nul. On considère $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda x + \mu f(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. En composant par f, par linéarité, on a : $\lambda f(x) - \mu x = 0_{\mathbb{R}^3}$. Ainsi, avec ces deux équations : $(\lambda^2 + \mu^2)x = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc, comme x n'est pas nul $\lambda = \mu = 0$. $\boxed{\text{La famille } \big(x, f(x)\big) \text{ est libre.}}$

12. Compte-tenu des question précédentes, on a $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) \geqslant 2$, $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant 1$ et

$$\dim \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) + \dim \operatorname{Ker} f = 3$$

donc $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = 2$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. En posant x' un vecteur de $\operatorname{Ker} f$ non nul, (x') est une base de $\operatorname{Ker} f$ puis, $\big(x', x, f(x)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base la matrice de f est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci signifie exactement que $\boxed{A \text{ est semblable à } B}$.

— Fin du corrigé —