

Concours blanc

7 janvier 2025

durée 4h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale à l'enseignant se trouvant dans la salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants à traiter sur copie séparée.

Exercice 1 : Tube métallique dans un solénoïde

A- Analyse du dispositif

Une bobine, d'axe Oz , de longueur l , de section S comportant N spires, assimilée à un solénoïde infiniment long, est alimentée par un courant sinusoïdal de la forme : $i_L(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Sa résistance est R_0 , son inductance est L_0 . On introduit dans cette bobine un cylindre conducteur creux, de rayon a , d'épaisseur b petite devant le rayon, de même longueur et de conductivité σ (cf Figure 1).

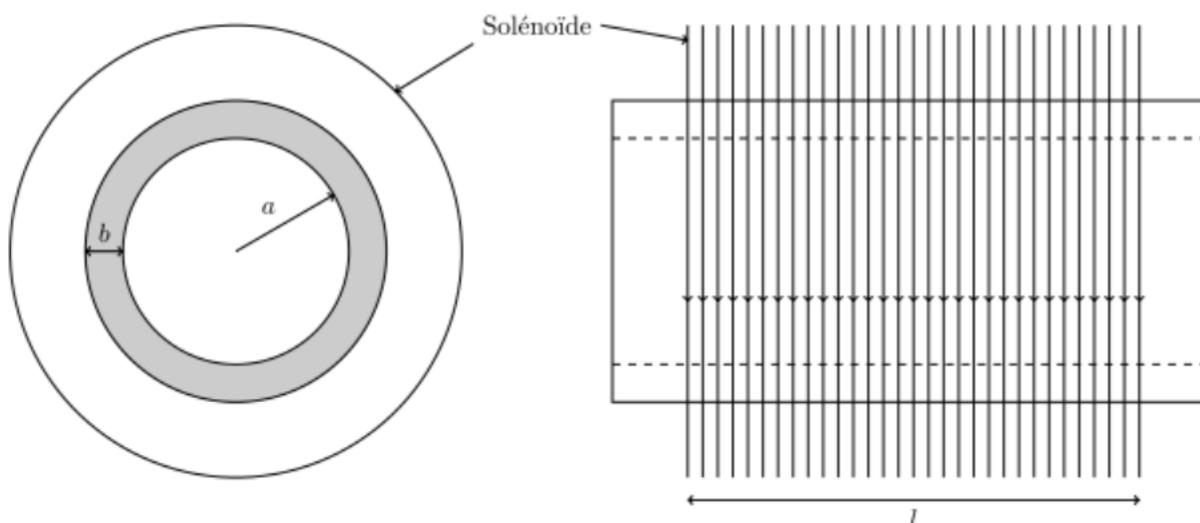


Figure 1

1. On appelle \vec{B}_0 le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde créé par le courant $i_L(t)$. Rappeler sans démonstration l'expression de \vec{B}_0 .
2. Exprimer l'inductance L_0 du solénoïde en l'absence du cylindre.
3. Rappeler l'équation de Maxwell Faraday. En déduire l'existence d'un champ électrique \vec{E} , appelé champ électromoteur, et en conséquence l'apparition dans le tube un vecteur densité de courant induit \vec{j} .
4. Exprimer \vec{j} en fonction du champ \vec{E} et de la conductivité σ .
5. Avec des arguments de symétrie, donner la géométrie de \vec{j} puis du champ \vec{B}_1 qu'il crée.
6. Justifier, en faisant une analogie avec un solénoïde infiniment long, que $\|\vec{B}_1\| = \mu_0 b \|\vec{j}\|$ à l'intérieur du cylindre et que \vec{B}_1 est nul à l'extérieur.

7. Le champ total (en notation complexe) \vec{B} est égal à $\vec{B}_0 + \vec{B}_1$. En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday sous sa forme intégrale et en posant pour l'écriture d'un nombre complexe $\underline{A}(t) = \underline{A}_0 \exp(i\omega t)$ avec $i^2 = -1$, en déduire l'expression de \vec{B}_1 en fonction de \vec{B}_0 .

On trouve :

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{-1 + \frac{2i}{\mu_0 \omega a b \sigma}} \vec{B}_0$$

8. Calculer en notation complexe le flux du champ magnétique total en distinguant 2 zones d'application. En déduire la fem d'induction complexe.
9. Écrire alors la loi d'Ohm pour le solénoïde comportant le tube conducteur sous la forme : $\underline{u} = \underline{Z} i_L$ avec

$$\underline{Z} = R(\omega) + i\omega L(\omega) \text{ où } R(\omega) = R_0 + \frac{\pi a^2}{S} \frac{\frac{2L_0}{\mu_0 \sigma a b}}{1 + \left(\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega a b}\right)^2} \text{ et } L(\omega) = L_0 \left(1 - \frac{\pi a^2}{S} \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega a b}\right)^2}\right).$$

B- Détection synchrone

On construit ensuite un dispositif de détection synchrone constitué :

- d'un convertisseur tension-courant,
- d'un multiplieur,
- d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure bien choisie.

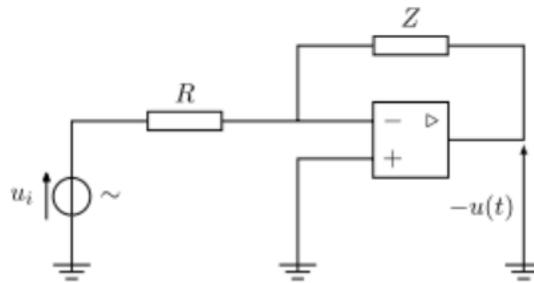


Figure 2

B-1 Convertisseur tension-courant

On considère le dispositif de la figure 2 où l'amplificateur linéaire intégré (ALI) est supposé idéal de gain infini. L'impédance \underline{Z} est celle du solénoïde comportant le tube conducteur.

10. Le fonctionnement de cet ALI est-il linéaire? En déduire l'expression de \underline{u} en fonction de \underline{u}_i .

Le dipôle Z d'impédance $\underline{Z}(\omega)$, de module Z et d'argument ψ est alimenté par une source de courant alternatif sinusoïdal de fréquence f et de pulsation ω qui impose $i(t) = I_m \cos(\omega t)$. Soit $u(t)$ la tension à ses bornes telle que $u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi) = Z I_m \cos(\omega t + \psi)$. On réalise le montage dont le schéma est donné figure 3 avec $u_i(t) = U_{im} \cos(\omega t)$.

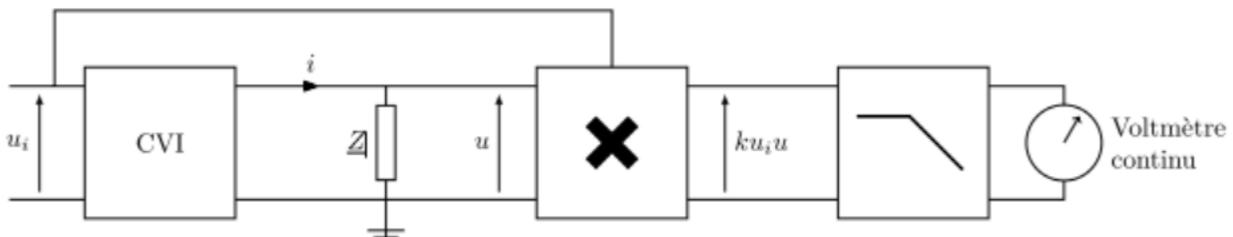


Figure 3

Après le dipôle on place un multiplieur de grande impédance d'entrée et un filtre passe-bas.

11. Montrer qu'avec un filtre passe-bas adapté, la tension mesurée par le voltmètre est proportionnelle à la partie réelle de \underline{Z} .

B-2 Déphaseur par détection synchrone de la partie imaginaire

On utilise le circuit de la Figure 4 où l'ALI est supposé idéal.

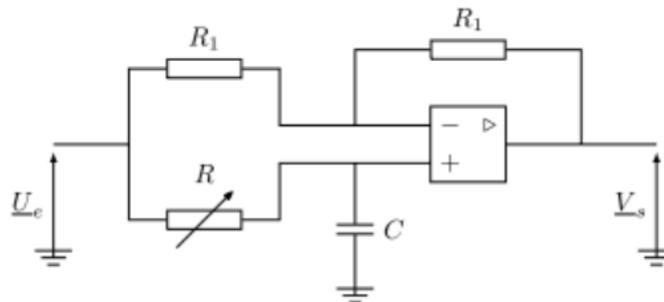


Figure 4

12. Montrer qu'il s'agit d'un circuit déphaseur en exprimant sa fonction de transfert.
13. À quelle condition liant R , C et ω peut-on effectuer un déphasage de $-\pi/2$?

B-3 Analyse du montage complet

On réalise ensuite le montage de la figure 5.

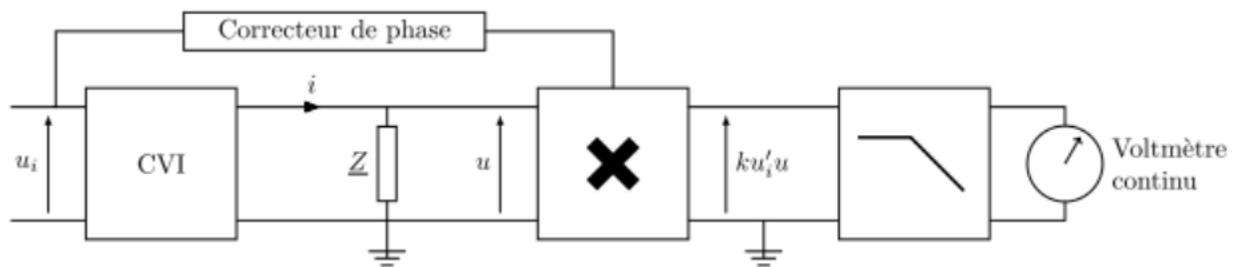


Figure 5

Le correcteur de phase correspond au déphaseur défini précédemment.

14. Montrer que la tension mesurée par le voltmètre est proportionnelle à la partie imaginaire de \underline{Z} .

Le dipôle est constitué par le solénoïde (qui contient ou non le tube conducteur creux). Dans une première expérience, le solénoïde ne contient pas le tube. À l'aide des méthodes précédentes, on mesure la partie réelle et la partie imaginaire de son impédance complexe. Dans une seconde expérience, on introduit le tube dans le solénoïde et on mesure de nouveau la partie réelle et la partie imaginaire de son impédance complexe.

15. Comparer les parties réelles de ces deux impédances.
16. Comparer les parties imaginaires de ces deux impédances.
17. Comment s'appelle le courant qui circule dans le tube?
18. Que se passerait-il si la surface du tube creux était rayée? Conclure.

Exercice 2 : Transmission dans un câble coaxial

On souhaite étudier dans cet exercice la propagation d'une onde dans un câble coaxial. Celui-ci est constitué de deux conducteurs cylindriques coaxiaux infinis, de rayons respectifs a et b ($a < b$) (figure 1). L'espace entre les deux conducteurs est assimilé à du vide.

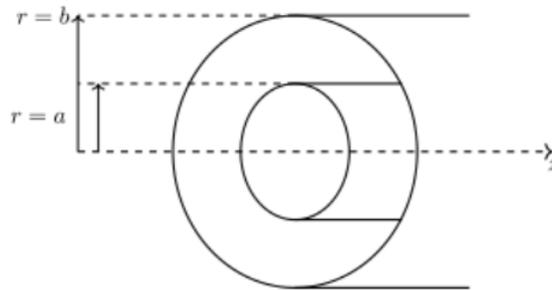


Figure 1

On étudie le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) dans le câble en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz) colinéaire à l'axe du câble. Le conducteur intérieur est parcouru par un courant électrique $i(z, t) = i_0 \cos(\omega t - kz)$, tandis que le conducteur extérieur est parcouru par $-i(z, t)$.

1. Rappeler les équations de Maxwell. Que deviennent-elles dans le vide ?
2. Établir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide.
3. Montrer que des ondes planes de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(j\omega t - jkz)$ et $\vec{B} = \vec{B}_0 \exp(j\omega t - jkz)$ peuvent se propager dans le vide. En déduire l'expression du vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_z$. Caractériser la structure des ondes planes.
4. On cherche, maintenant, des solutions compatibles avec les conditions aux limites imposées par le câble. On suppose que les conducteurs sont parfaits. Justifier que le courant $i(z, t)$ est surfacique.

On suppose qu'en un point M de coordonnées (r, θ, z) , le champ électromagnétique est de la forme :

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0(r) \exp(j\omega t - jkz) \vec{e}_r \\ \vec{B} = B_0(r) \exp(j\omega t - jkz) \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Cette forme est appelée mode Transverse Électrique et Magnétique (mode TEM).

5. En intégrant l'équation de Maxwell Ampère sur un contour \mathcal{C} judicieusement choisi, montrer que

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i_{enlace}$$

où i_{enlace} sont les courants enlacés par le contour \mathcal{C} .

6. En déduire l'expression de $B(r)$ pour $r < a$, $a < r < b$ puis $r > b$.

7. Montrer que, pour $a < r < b$, $E_0(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{k}{\omega} i_0$.

8. Le mode TEM décrit-il une onde plane ? Montrer que la relation de structure s'écrit : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$.

9. Exprimer la vitesse de phase v_ϕ . Y a-t-il dispersion ?

10. Exprimer le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie instantanée dans la partie $a < r < b$. En déduire la vitesse de propagation de l'énergie.

11. Exprimer la puissance moyenne se propageant le long du câble.

12. En pratique, la conductivité n'est pas infinie et le champ électromagnétique pénètre dans les conducteurs. La conductivité du cuivre vaut $\sigma = 6.10^7 \text{ S.m}^{-1}$. Discuter la pertinence de l'utilisation du modèle du conducteur parfait sachant que le signal véhiculé par le câble coaxial est à une fréquence de l'ordre du kHz.

Données :

$$\text{rot} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

Exercice 3 : Mécanique du transport ferroviaire

La première locomotive à vapeur date de 1804, elle a été conçue par un ingénieur des mines anglais Richard Trevithick, comme une application de la machine à vapeur. Depuis, le transport ferroviaire a connu une évolution rapide ; il apparaît aujourd'hui comme une solution écologique au désir et au besoin de mobilité d'une population mondiale qui ne cesse de croître.

A- Démarrage du train de Trevithick

Dans cette partie, on étudie le train de Trevithick. L'idée de Trevithick a été d'associer la roue pour le transport, à la machine à vapeur pour la force motrice. Au cours d'un essai, la locomotive de Trevithick de masse $M_\ell = 1$ t, dont la figure 1 montre une reproduction, a été capable de tracter un ensemble de dix wagons portant un chargement d'acier de masse totale $M_c = 10$ t sur une distance $D = 15$ km. Lors de cet essai en ligne droite, conduit sur des rails en fonte horizontaux parallèles à l'axe Ox , le train parvint à atteindre la vitesse $v_0 = 8$ km.h⁻¹, supposée constante après la phase de démarrage.



Figure 1 : La locomotive de Trevithick

On étudie ici la phase de démarrage de la locomotive tractant les dix wagons. L'étude est conduite dans le référentiel terrestre supposée galiléen. On envisage un démarrage à accélération constante, et on note \vec{a}_0 cette accélération. On définit deux systèmes :

- le système Σ_1 , de masse totale M_c , est constitué de l'ensemble des 10 wagons et de leur charge.
- le système Σ_2 correspond à la locomotive de Trevithick, de masse totale M_ℓ , et qui compte également quatre roues en acier.

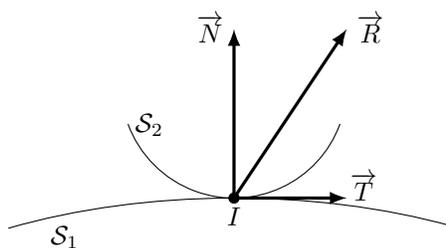
On note $\vec{F}_{\Sigma_2/\Sigma_1}$ la force qu'exerce Σ_2 sur Σ_1 ; cette force est supposée horizontale.

On adopte un modèle très simpliste de contact ponctuel entre les roues et les rails et on suppose qu'aucune roue ne glisse sur les rails. On donne pour le contact acier-fonte le coefficient d'adhérence (également appelé coefficient de frottement statique) f_a . Les lois de Coulomb du frottement solide sont rappelées ci-dessous :

Soient deux solides \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 en mouvement par rapport au référentiel d'étude \mathcal{R}_0 , en contact au point I . Sans glissement, $v_{I \in \mathcal{S}_1 / \mathcal{R}_0} = v_{I \in \mathcal{S}_2 / \mathcal{R}_0}$, il y a adhérence. La force \vec{R} qu'exerce \mathcal{S}_1 sur \mathcal{S}_2 a une composante normale \vec{N} et une composante tangentielle \vec{T} ($\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$) telles que

$$\|\vec{T}\| < f_a \|\vec{N}\|$$

où f_a est le coefficient d'adhérence entre les deux solides.



Frottement entre deux solides dans le cas d'un contact ponctuel adhérent.

On admet qu'une étude dynamique permet d'établir, qu'en considérant les roues de masse négligeable, la force \vec{F}_{r1} exercée par les rails sur une roue du système Σ_1 est normale au rail. Par la suite, on fera cette approximation pour toutes les roues du système Σ_1 . On note également \vec{F}_{r2} la force qu'exerce le rail sur une des quatre roues de la locomotive, avec $\vec{F}_{r2} = \vec{N}_{r2} + \vec{T}_{r2}$, où \vec{N}_{r2} et \vec{T}_{r2} désignent respectivement les composantes normale et tangentielle de l'action d'un rail sur une roue de la locomotive.

1. Faire un schéma de la situation et représenter les forces qui s'exercent sur Σ_1 . Exprimer la force $\vec{F}_{\Sigma_2/\Sigma_1}$ en fonction, entre autres, de l'accélération \vec{a}_0 .
2. Faire un autre schéma où figurent les forces qui s'exercent sur Σ_2 . On négligera toute force de frottement fluide due à l'air.
3. Montrer que \vec{T}_{r2} est nécessairement non nulle. On admettra que cette force est identique sur les quatre roues de la locomotive. Exprimer \vec{T}_{r2} en fonction notamment de l'accélération \vec{a}_0 et des diverses masses introduites dans l'énoncé.
4. Calculer le temps qu'a mis le train de Trevhitick à atteindre sa vitesse de croisière, en supposant que $\|\vec{T}_{r2}\| = 0,1\|f_a\|\|\vec{N}_{r2}\|$ avec $f_a = 0,12$, de sorte que l'absence de glissement est assurée.

Aide aux calculs : $\frac{88}{36 \times 12 \times 9,81} = 0,0207$

B- Circulation des trains à grande vitesse (TGV)

On s'intéresse maintenant aux voies des trains à grande vitesse, dont le tracé est déterminé par diverses contraintes. Une des contraintes essentielles est que le trajet doit être le plus horizontal possible. La morphologie des territoires traversés impose de ce fait des tracés courbes pour les trajets des trains.

On envisage ici le problème de la jonction entre deux tronçons rectilignes A_0A et BB_0 formant un angle de 120° (figure 2). On considère pour simplifier que le tracé de la voie entre les points A et B suit une portion du cercle \mathcal{C} tangent aux deux segments de droites en A et B . On note d_{AB} la distance en ligne droite entre ces deux points. Le référentiel terrestre est toujours supposé galiléen.

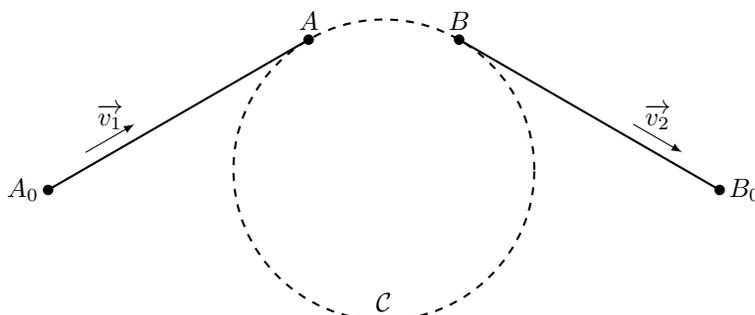


Figure 2 : Raccordement circulaire entre deux tronçons rectilignes.

5. Déterminer le rayon R_C du cercle \mathcal{C} en fonction des données.
6. En supposant la vitesse du train constante en norme, de valeur notée V_0 (soit $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = V_0$), tracer l'évolution de la norme de l'accélération du train, assimilé à un point matériel, entre l'instant $t = 0$ où il se trouve en A_0 et l'instant t_f où il se trouve en B_0 .
7. Calculer la valeur numérique de l'accélération a_C entre les points A et B dans le cas où $d_{AB} = 2$ km et $V_0 = 300$ km.h⁻¹.

Aide aux calculs : $\frac{1}{2 \times 12^2} = 3,47.10^{-3}$

Au niveau d'un tel virage, la voie présente un dévers, c'est-à-dire une différence de hauteur entre les rails intérieur et extérieur qui permet d'incliner le train. Ce dévers est conçu de sorte qu'un passager ne soit pas trop fortement déporté sur le bord de son siège au cours du virage. L'écartement entre les deux rails au niveau des roues est quant à lui fixé à $E_r = 1400$ mm.

Lors d'un voyage en TGV, un passager curieux d'étudier ce dévers a placé un pendule simple, constitué d'une masse m_p reliée à un fil inextensible, au dos du siège situé devant lui, vers l'avant du train. Ainsi fixé, ce pendule peut se déplacer librement dans un plan vertical perpendiculaire à la vitesse du train. La figure 3 montre la position d'équilibre du pendule dans le virage indiqué sur la carte, alors que le train roule à 287 km.h⁻¹.

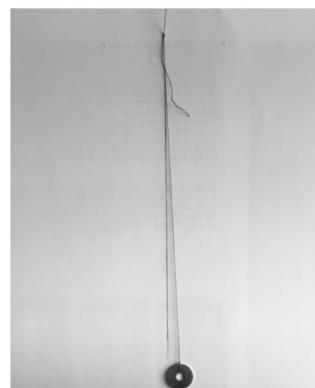
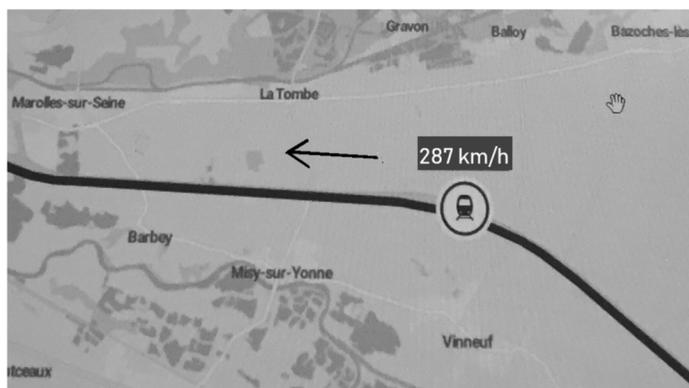


Figure 3 : La carte permet d'estimer que le rayon de courbure du virage lors de la réalisation de l'expérience est $R_C = 4$ km. Sur la photo à droite, le segment noir matérialise la position du pendule lorsque le TGV est en mouvement rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. On note alors un angle de déviation $\beta = 0,04$ rad.

- Justifier le fait qu'il existe une pseudo-force dans le référentiel lié au train qui puisse expliquer que le pendule soit en équilibre. Un schéma clair du pendule dans le référentiel du train est attendu sur lequel on mentionnera l'angle β ainsi que l'angle γ matérialisant le dévers. Le bilan des forces devra apparaître sur un deuxième schéma.

Exercice 4 : Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

On s'intéresse à l'atome d'hydrogène dans le modèle de Bohr. Dans ce modèle, le proton de charge $+e$ est supposé immobile et placé à l'origine O du repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. L'électron est soumis au champ électrique coulombien du proton et on néglige l'effet de son poids. Le moment cinétique \vec{L}_O de l'électron par rapport à O est quantifié : $\|\vec{L}_O\| = n \frac{h}{2\pi}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

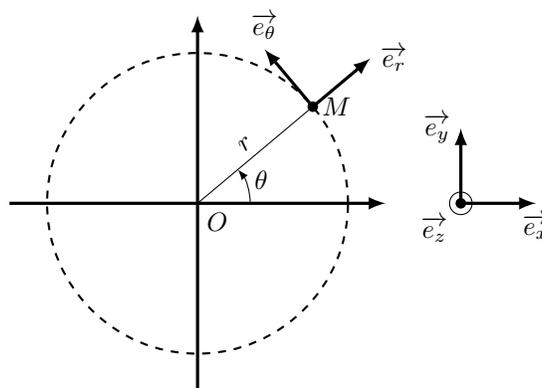
Données :

Grandeur	Notation	Valeur numérique
Célérité des ondes électromagnétiques dans le vide	c	$3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	h	$6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Permittivité du vide	ϵ_0	$8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité du vide	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	e	$1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse d'un électron	m_e	$9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Aide aux calculs : $\frac{6,63^2 \times 8,85}{\pi \times 9,11 \times 1,60^2} = 5,3096$ $\frac{1,60^4 \times 9,11}{8 \times 8,85^2 \times 6,63^2} = 2,16 \cdot 10^{-3}$ $\frac{6,63}{2 \times 1,60} = 2,0718$

- Montrer que \vec{L}_O est constant. En déduire que le mouvement de l'électron est plan.

On introduit le vecteur unitaire \vec{e}_z de telle sorte que \vec{L}_O soit de même direction et de même sens que \vec{e}_z . On introduit aussi la base locale cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ d'axe (O, \vec{e}_z) . Un point M du plan du mouvement est repéré par ses coordonnées cylindriques $(r, \theta, 0)$ comme indiqué sur la figure 1. On note donc $\vec{L}_O = L_O \vec{e}_z$.

Figure 1 : Repérage d'un point M dans le plan du mouvement de l'électron.

2. Exprimer L_O en fonction de m_e , r et de $\frac{d\theta}{dt}$.

On suppose que l'électron est en mouvement circulaire autour du proton.

3. Justifier le fait que le mouvement de l'électron est uniforme.
4. Obtenir l'expression de la vitesse $v = \|\vec{v}\|$ de l'électron en fonction de e , m_e , ε_0 et du rayon R de sa trajectoire.
5. En déduire que le rayon de la trajectoire s'écrit $R = n^2 a_0$, où a_0 est le rayon de Bohr que l'on exprimera en fonction de e , m_e , ε_0 et de h . Calculer numériquement a_0 et l'exprimer en pm.
6. Citer la relation numérique entre le joule et l'électronvolt.
7. Montrer que l'énergie mécanique de l'électron s'écrit $\mathcal{E}_m = -\frac{E_0}{n^2}$ et donner l'expression de E_0 en fonction de e , m_e , ε_0 et de h . Calculer la valeur numérique de E_0 en eV.
8. Citer la relation entre l'énergie d'un photon E_γ et sa longueur d'onde λ . Calculer en eV l'énergie d'un photon de longueur d'onde $\lambda = 600$ nm.

Lorsqu'un photon est absorbé par un atome d'hydrogène, cela provoque une transition d'un niveau d'énergie repéré par l'entier n vers un niveau d'énergie repéré par l'entier p .

9. Donner, en fonction de E_0 , h , c , n et de p , l'expression des longueurs d'onde $\lambda_{n,p}$ des photons susceptibles d'être absorbés.
10. On admet que les transitions associées à des longueurs d'onde dans le visible sont obtenues pour $n = 2$. Préciser les longueurs d'onde extrêmes du visible ainsi que les couleurs associées. En déduire l'expression des valeurs minimale et maximale permises pour p .
11. Que vaut l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire l'énergie minimale à fournir pour que l'électron échappe à l'attraction coulombienne du proton ?