

Physique DM n°2

*le 7 octobre 2024
calculatrice interdite*

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

I - De la cuisson des oeufs

Cet appareil cuit des oeufs (au nombre de 1 à 7) grâce à la vapeur d'eau qui se forme par ébullition de l'eau placée dans le fond du cuiseur.

Les oeufs à cuire selon différents degrés de cuisson (coque, mollet, dur) sont placés sur une grille percée de 7 trous circulaires et de 6 trous périphériques permettant la circulation de la vapeur d'eau dans l'enceinte de cuisson.



FIGURE 1 – Vue de profil, vue de dessus, vue de dessus sans la cloche (laissant voir la grille)

Des orifices sont percés au sommet de la cloche métallique pour permettre à la vapeur de s'échapper. La puissance électrique consommée par l'appareil est : $\mathcal{P} = 350 \text{ W}$. On considèrera que cette puissance est intégralement consommée par la résistance chauffante.

La quantité d'eau placée dans le cuiseur est mesurée à l'aide d'un gobelet gradué selon le nombre d'oeufs à cuire de type de cuisson désirée. Le fond est bombé à cause de la présence d'une pique sous la base du gobelet permettant le perçage du fond de l'oeuf lors de la cuisson afin d'éviter la rupture de la coquille.

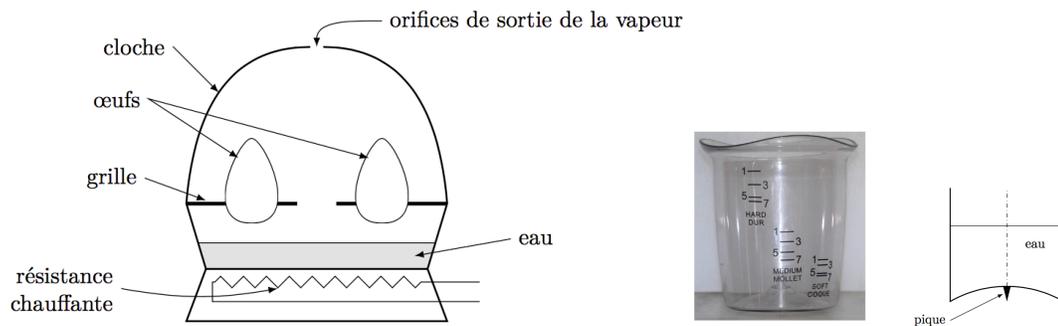


FIGURE 2 – Schéma général du cuiseur et du gobelet

Fonctionnement du cuiseur

Le volume d'eau nécessaire à la cuisson d'un seul oeuf dur est de 120 mL. Les oeufs à la température initiale $T_0 = 20\text{ }^\circ\text{C}$ sont placés dans le cuiseur et la masse d'eau m_0 contenue dans le gobelet (à la même température initiale T_0) est versée sous les oeufs. Cette eau est portée à ébullition sous $p = 1\text{ bar}$, puis évaporée. Le cuiseur s'arrête quand toute l'eau s'est évaporée.

Notons c_{eau} la capacité thermique massique de l'eau liquide, T_{eb} sa température d'ébullition dans les conditions de l'expérience, $h \approx 1200\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ le coefficient de transfert conducto-convectif (eau \leftrightarrow oeuf) et $m(t)$ la masse d'eau contenue dans le cuiseur à l'instant t .

Soit Δt_1 la durée de chauffage de l'eau de T_0 à T_{eb} et Δt_2 la durée de la cuisson des oeufs, qui correspond à l'évaporation totale de l'eau. Pendant cette deuxième phase, on supposera que la vapeur d'eau est à la température T_{eb} sous la pression $p = 1\text{ bar}$.

Données :

- masse volumique de l'eau : $\mu = 1000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.
- conductivité thermique : $\lambda = 0,6\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.
- capacité thermique massique de l'eau : $c_{eau} = 4180\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

A Chauffage de l'eau

Q1. Soit m_c la valeur en eau du cuiseur (on rappelle que la valeur en eau d'un objet est définie par $C_{cuiseur} = m_c \cdot c_{eau}$). En supposant la transformation adiabatique du système : {cuiseur + eau} pendant le chauffage, exprimer Δt_1 en fonction des données.

Q2. On place dans le cuiseur une masse d'eau $m_0 = 125\text{ g}$. On mesure alors une durée de chauffage $\Delta t_1 = 150\text{ s}$ avant de parvenir à l'ébullition. En déduire la valeur en eau du cuiseur.

Aide au calcul : $\frac{15 \times 35}{4,18 \times 80} \approx 1,57$

B Détermination de la durée de cuisson Δt_2

Q3. Mécanisme de la cuisson des oeufs

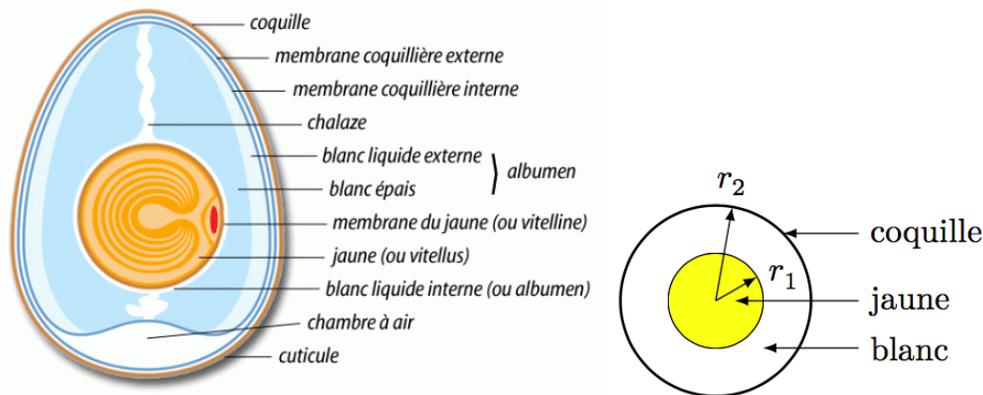


FIGURE 3 – Schéma de constitution interne d'un oeuf et modèle associé pour l'étude du mécanisme de cuisson

Un oeuf est composé de trois parties :
 i- une coquille très mince ;

ii- le blanc d'oeuf constituant les deux tiers de l'oeuf. C'est un liquide composé à environ 90% d'eau et 10% de protéines, sels minéraux et vitamines ;

iii- le jaune d'oeuf est composé à moitié d'eau, de 15% de protéines et de 30% de lipides.

Lors de la cuisson (type oeuf dur) les protéines se déroulent partiellement et se lient pour former un réseau qui piège l'eau : c'est un gel. Les oeufs caoutchouteux sont ceux qui ont perdu trop d'eau ; c'est aussi la sur-cuisson du jaune qui le fait devenir sableux. Quand un oeuf est cuit à 100°C, sa masse diminue progressivement à mesure que l'eau est éliminée du gel formé. Quand un oeuf est cuit à une température peu supérieure à la température de coagulation de ses protéines, il coagule en conservant son eau, gage de moelleux. Le jaune d'oeuf commence à épaissir à 65°C. Il coagule totalement à une température de 85°C.

Justifier l'existence de la pique sous le fond du gobelet.

Q4. Modélisation et établissement de l'équation de la chaleur

Pour déterminer le temps de cuisson, il est nécessaire de résoudre l'équation de la chaleur en régime dépendant du temps. On modélise un oeuf (figure 3) comme deux sphères concentriques de rayon r_1 et r_2 limitant le jaune et le blanc.

Afin de simplifier l'étude, on va négliger l'influence de la coquille et considérer l'intérieur de l'oeuf comme homogène, de rayon $r_2 = 2,5$ cm et ayant les propriétés thermodynamique de l'eau :

i- masse volumique μ ;

ii- capacité thermique massique c_{eau} ;

iii- conductivité thermique λ .

On suppose que la champ de température dans l'oeuf est à une dimension d'espace en coordonnées sphériques $T(r, t)$.

a) Par un bilan d'énergie sur une couche sphérique entre r et $r + dr$ et les dates t et $t + dt$, établir l'équation de la chaleur en coordonnées sphériques.

b) Exprimer le temps caractéristique de diffusion dans l'oeuf τ . Donner un ordre de grandeur de τ . Commenter la dépendance de τ en fonction de r_2 .

Q5. Résolution de l'équation de la chaleur

a) Afin de résoudre cette équation en régime dépendant du temps, on pose dans un premier temps :

$$T(r, t) = T_{eb} + f(r)g(t) \quad (1)$$

En utilisant l'équation de la chaleur, montrer que la composante temporelle $g(t)$ vérifie l'équation :

$$\frac{1}{g(t)} \frac{dg(t)}{dt} = -A^2 \quad (2)$$

où A est une constante réelle positive, inconnue à ce stade de la résolution.

Donner l'expression de $g(t)$ à une constante multiplicative près et justifier le signe $-$ figurant devant A^2 .

b) Pour trouver la composante spatiale de $T(r, t)$, on pose $f(r) = \frac{F(r)}{r}$. Montrer alors que $F(r)$ est solution de l'équation :

$$\frac{d^2F(r)}{dr^2} + B^2F(r) = 0 \quad (3)$$

On exprimera B en fonction de A , μ , λ et c_{eau} , puis de A et du coefficient de diffusion thermique (ou diffusivité) D .

En déduire l'expression de $f(r)$.

c) Montrer alors que la solution générale de l'équation de diffusion peut s'écrire sous la forme :

$$T(r, t) = T_{eb} + \sum_i \frac{\beta_i \sin(B_i \cdot r)}{r} e^{-A_i^2 t} \quad (4)$$

Quelle sont les différentes conditions qui permettent théoriquement de calculer les coefficient β_i et A_i ?

Q6. Détermination des constantes dans l'approximation de Fourier

Dans le cadre de l'approximation de Fourier, on ne conserve dans l'expression 4 que le terme associé à la constante de temps la plus longue, donc celui correspondant au coefficient A_i le plus petit (qui sera noté A dans la suite), car les autres termes sont rapidement amortis au cours du temps :

$$T(r, t) \approx T_{eb} + \frac{\beta \sin(B \cdot r)}{r} e^{-A^2 t} \quad (5)$$

a) On suppose que les échanges thermiques au niveau de la coquille sont donnés par la loi de Newton $\vec{j}_{cc} = h(T(r = r_2, t) - T_{eb}) \vec{u}_r$.

Exprimer la condition aux limite en $r = r_2$ pour toutes dates t , montrer que B est solution de l'équation :

$$\tan(B \cdot r_2) = \frac{B \cdot r_2}{1 - \frac{r_2 h}{\lambda}} \quad (6)$$

On notera $B' = B \cdot r_2$.

b) Représenter $\tan(B')$ pour $B' \in [0, 2\pi]$. Par analyse graphique, montrer que dans ces conditions, on peut prendre $B' \approx \pi$ comme première solution de l'équation 6 dans \mathbb{R}^{+*} .

Evaluer l'erreur ϵ commise sur la valeur de B' .

Aide au calcul : $\frac{\pi}{49} \approx 0,064$.

c) Exprimer alors $T(r, t)$ avec la valeur A précédente. Quelle conséquence peut-on en tirer sur la température à la surface de l'oeuf? Montrer que cela revient à considérer une des grandeurs caractéristiques du problème comme infinie.

d) Calculer β en exprimant la température au centre de l'oeuf à $t = 0$.

Q7. Calcul de la durée de cuisson Δt_2 pour un oeuf dur

a) Exprimer en fonction de D et des autres données du problème la durée de cuisson Δt_2 à l'état dur d'un oeuf de rayon r_2 , pour lequel la température au centre doit atteindre $T_c = 80^\circ\text{C}$.

b) Calculer Δt_2 pour un oeuf de rayon $r_2 = 2,5$ cm. Commenter le résultat obtenu.

$$\text{Aide au calcul : } \frac{(2,5)^2 \times 4,18}{\pi^2 \times 0,6} \times \ln(4) \approx 6,12$$

II- La modulation de largeur d'impulsion

1- Modulation de largeur d'impulsion : réalisation analogique

On considère le montage de la figure A.2 mettant en jeu un ALI supposé idéal auquel on applique :
- un signal modulant $u_e(t)$

MLI : Modulation de largeurs d'impulsion

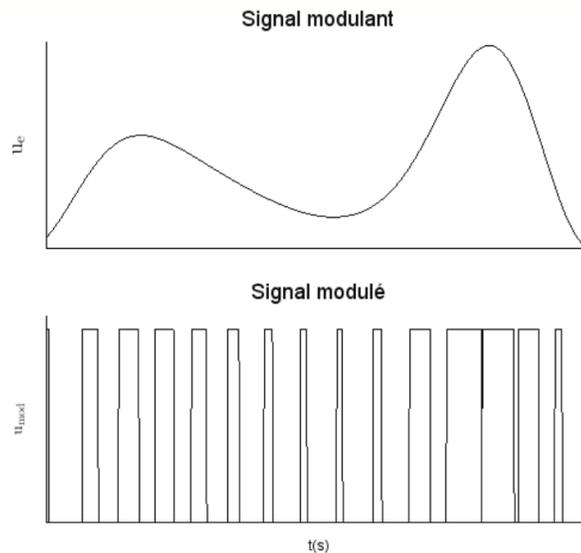


Figure A.1

Le principe consiste à générer des impulsions électroniques à intervalles régulières mais dont la largeur temporelle va dépendre d'un signal « modulant ». C'est la valeur de tension de ce signal qui va déterminer la largeur de l'impulsion (cf. Figure A.1).

FIGURE 4 – Sonde de Hall

- une tension « dent de scie » $u_{scie}(t)$ de période T dont l'allure est représentée figure A.3.

1. Rappeler les caractéristiques d'un Amplificateur Linéaire Intégré idéal.
2. L'ALI fonctionne-t-il en régime linéaire ou en régime saturé? Quelle fonction réalise un tel montage?

La tension $u_{scie}(t)$ est une tension dite « dent de scie » (cf. figure A.3). On note T la période de cette tension et U_{max} la tension maximale atteinte par $u_{scie}(t)$.

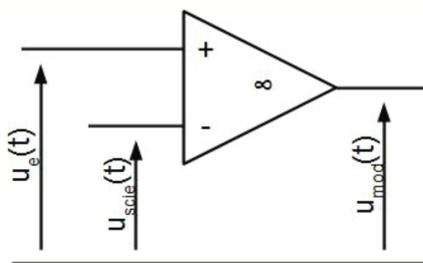


Figure A.2

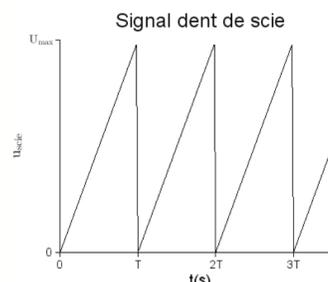


Figure A.3

FIGURE 5 – Sonde de Hall

3. Déterminer la pente a des rampes de la tension $u_{scie}(t)$ en fonction de T et U_{max} .
4. On considère un signal modulant continu $u_e(t) = U_0$. Déterminer les durées τ_+ et τ_- correspondant respectivement aux temps passés en saturation haute et en saturation basse durant une période T , en fonction de U_0 ,

U_{max} et T . Représenter graphiquement le signal $u_{mod}(t)$ en sortie de l'ALI entre $t = 0$ et $t = 3T$.

5. Que se passe-t-il si $U_0 > U_{max}$?

6. On considère maintenant comme signal modulant $u_e(t)$ un signal sinusoïdal de période $T_e = 5T$, de valeur basse 0 et de valeur haute U_{max} (atteinte pour $t = 0$). On prendra $f_e = 1/T_e = 1$ kHz, la fréquence du signal modulant.

6.a Donner l'équation horaire de $u_e(t)$.

6.b Représenter le spectre de $u_e(t)$.

6.c On a représenté en annexe (à rendre avec la copie) le signal $u_e(t)$ (Figure C.1) sur une période. Représenter sur le même graphique les signaux $u_{scie}(t)$ et $u_{mod}(t)$. On note V_{sat} la tension de saturation positive de l'ALI. On prendra pour le tracé graphique $V_{sat} = U_{max}/2$.

6.d On réalise expérimentalement la modulation de largeur d'impulsion. Pour savoir comment obtenir le signal modulant à partir du signal modulé (démodulation), on observe le spectre du signal. Celui-ci est donné figure A4 - l'échelle des amplitudes est arbitraire. Proposer, en le justifiant, le type de filtre permettant de démoduler le signal $u_{mod}(t)$.

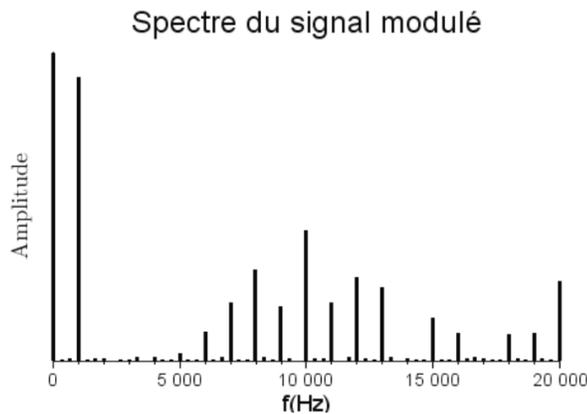


Figure A.4

2- Réalisation d'un signal en « dent de scie »

Le principe de cette modulation est basé sur l'utilisation d'un signal dent de scie. On se propose ici d'étudier une façon de créer un tel signal. On considère le montage suivant où les ALI sont supposés idéaux.

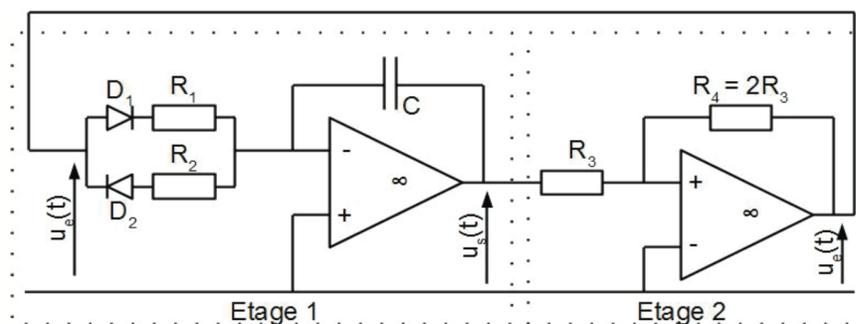


Figure A.5:

7. Rappeler les ordres de grandeur des impédances d'entrée et de sortie réelles d'un ALI.

8. Expliquer brièvement pourquoi on peut commencer par étudier les deux étages 1 et 2 représentés sur le

schéma séparément.

9. On considère l'étage 1. On admet que :

- Quand le signal $u_e(t)$ est positif, la diode D_2 est assimilable à un interrupteur ouvert et la diode D_1 à un fil.

- Quand le signal $u_e(t)$ est négatif, la diode D_2 est assimilable à un fil et la diode D_1 à un interrupteur ouvert.

9.a Déterminer l'équation différentielle qui relie $u_s(t)$ et $u_e(t)$ quand u_e est positive. Comment appelle-t-on un tel montage ?

9.b Déterminer l'équation différentielle qui relie $u_s(t)$ et $u_e(t)$ quand $u_e(t)$ est négative.

10. On considère maintenant l'étage 2.

10.a Expliquer pourquoi on sait que l'ALI de l'étage 2 va fonctionner en régime de saturation.

10.b On suppose que la sortie est en saturation haute $u_s = V_{sat}$. Déterminer les gammes de valeurs possibles pour u_s .

10.c On suppose que la sortie est en saturation basse $u_s = -V_{sat}$. Déterminer les gammes de valeurs possibles pour u_s .

10.d Représenter la caractéristique de transfert $u_s(u_s)$. Comment appelle-t-on un tel montage ?

On considère maintenant le montage entier. Il n'y a pas de « tension d'entrée » imposée de l'extérieur et la tension de sortie est $u_s(t)$.

11. On suppose que, à $t = 0$, l'étage 2 vient de basculer en saturation haute $u_e = V_{sat}$.

11.a Déterminer $u_s(t = 0)$ puis l'équation littérale horaire de $u_s(t)$ pour $t > 0$.

11.b Déterminer la date t_1 à laquelle l'étage 2 va basculer en saturation basse. On note Δt_{haut} la durée pendant laquelle l'étage 2 est en saturation haute. Expliciter littéralement Δt_{haut} .

12. A $t = t_1$, l'étage 2 vient donc de basculer en saturation basse.

12.a Déterminer l'expression littérale de $u_s(t)$ pour $t > t_1$.

12.b Déterminer la date t_2 à laquelle l'étage 2 va basculer à nouveau en saturation haute. On note Δt_{bas} , la durée pendant laquelle l'étage 2 est en saturation basse. Déterminer littéralement Δt_{bas} et la période T du signal $u_s(t)$.

13. Représenter sur le graphique Figure C.2 fourni en annexe (à rendre avec la copie) les signaux $u_s(t)$ et $u_e(t)$ en supposant $\Delta t_{bas} = 19\Delta t_{haut}$.

14. On veut créer un signal dent de scie de fréquence $f = 1$ MHz. On choisit $C = 10$ pF. De plus, pour que le signal ressemble le plus au signal dent de scie de la figure A.2, on suite $\Delta t_{bas} = 19\Delta t_{haut}$.

Déterminer les valeurs de R_1 et R_2 en fonction de C et f . Faire l'application numérique.

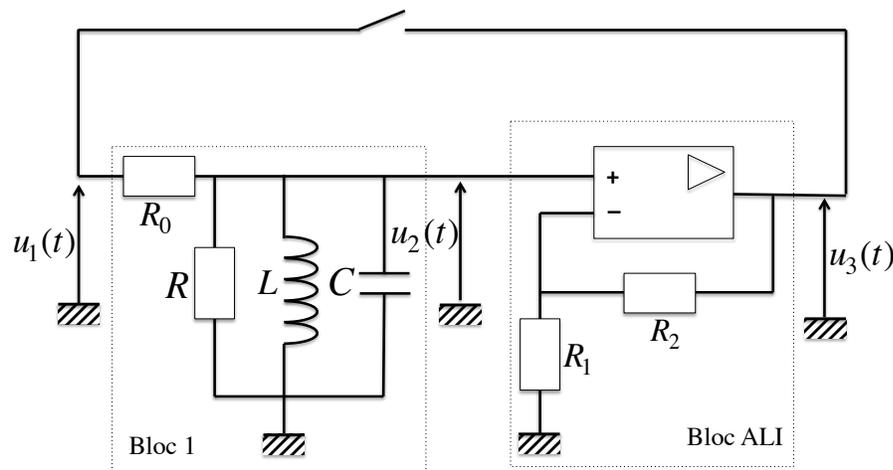
III - Oscillateur

On considère le montage ci-dessous où l'ALI supposé idéal est alimenté au moyen d'une alimentation symétrique $\pm V_{cc} = \pm 12$ V et sa tension de saturation est $V_{sat} = 11$ V.

III.1 Etude du bloc 1

Le bloc 1 réalise un filtre de fonction de transfert complexe $\underline{H} = \frac{u_2}{u_1}$.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} \text{ avec } A_0 = 0, 1; Q = 25; x = \omega/\omega_0; \log(25) \approx 1, 4.$$



1. Donner les équations des asymptotes hautes et basses fréquences du gain en décibels de ce filtre.
2. Représenter le diagramme de Bode (en amplitude uniquement) donnant ce gain en décibels en fonction de $\log(x)$.
3. Préciser la nature du filtre.
4. Exprimer, à partir du schéma du bloc 1, la fonction de transfert H en fonction de ω et des valeurs caractéristiques des composants de ce bloc 1. Par identification, donner les expressions littérales de ω_0 et Q en fonction des valeurs caractéristiques des composants.

III.2 Etude du bloc ALI

5. Déterminer l'expression littérale de la fonction de transfert complexe $\underline{G} = \frac{u_3}{u_2}$.
6. On pose $K = |\underline{G}|$. Exprimer K en fonction de R_1 et R_2 .

III.3 Système bouclé

On ferme l'interrupteur à $t = 0$, réalisant ainsi un système bouclé.

7. Dédire des questions précédentes l'équation différentielle vérifiée par u_3 .
8. A partir de cette équation :
 - 8.a) Trouver une condition liant A_0 , K et Q pour que s'établissent des oscillations quasi-sinusoïdales.
 - 8.b) Déterminer alors la fréquence f_0 de ces oscillations.
9. Toujours à partir de l'équation différentielle de u_3 , montrer que la naissance d'oscillations impose des conditions sur le produit A_0K et les expliciter.
10. On choisit des composants de manière à obtenir l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2u_3}{dt^2} - 10^4 \frac{du_3}{dt} + 9 \cdot 10^8 u_3 = 0$$

- 10.a) Donner l'expression numérique de u_3 en fonction de t sans chercher à calculer les constantes dépendant des conditions initiales.
- 10.b) Montrer que l'on obtient des oscillations dont l'amplitude A varie temporellement.
- 10.c) Exprimer et représenter A en fonction de t .

10.d) Dans la pratique, on obtient une stabilisation de l'amplitude à une valeur A_{max} ; expliquer pourquoi et expliciter A_{max} .

10.e) Compte tenu de ce qui précède, représenter l'allure de $u_3(t)$.

11. On utilise le dispositif bouclé pour suivre les déplacements x de la partie mobile d'un capteur capacitif dont la capacité est donnée par la loi $C = C_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right)$ avec $C_0 = 10 \mu\text{F}$ et $l = 10 \text{ mm}$. Ce capteur forme le condensateur du bloc 1.

Les composants choisis sont tels que le montage oscille à une fréquence f_{osc} liée à la capacité C par la relation $f_{osc} = \frac{D}{\sqrt{C}}$ avec $D = 1 \text{ H}^{-1/2}$.

A la position de référence du capteur ($x = 0$), la fréquence d'oscillation est f_{or} .

11.a) Montrer que, pour un petit déplacement x ($x/l \ll 1$), la fréquence d'oscillation peut se mettre sous la forme $f_{osc} = ax + b$ et expliciter a et b en fonction des données.

11.b) On note $\Delta f = f_{osc} - f_{or}$ la variation de la fréquence liée à un déplacement. La plus petite variation détectable est $\Delta f_{min} = 3 \text{ Hz}$. Quel est le plus petit déplacement détectable ?

Nom :

Document réponse à rendre avec la copie.

C.1 - Modulation de largeur d'impulsion – Question Q6.c.

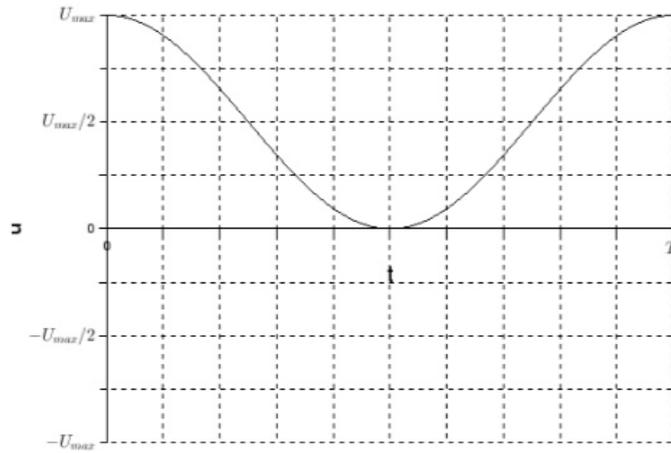


Figure C.1 : Chronogramme du signal $u_e(t)$ sur une période.

C.2 - Création d'un signal dent de scie – Question Q13.

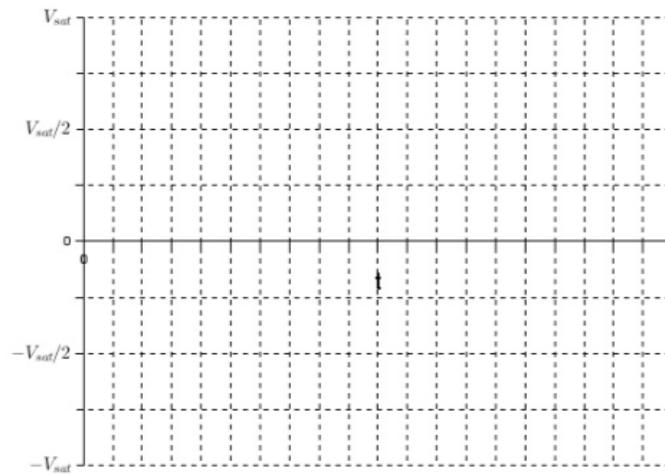


Figure C.2 : Chronogramme à compléter : on fera apparaître les grandeurs Δt_{haut} et Δt_{bas} .