Physique DM n°3

le 13 novembre 2024
calculatrice interdite

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

I Chimie

I.1 Étude cristallographique du nitrure de titane NTi

Q1. Le numéro atomique de l'élément titane est $Z = 22$. Donner la configuration électronique de l'atome de titane dans son état fondamental. Préciser quels sont les électrons de valence et ceux de c$\frac{1}{2}$ur. Citer l'ion le plus stable susceptible de se former.

Q2. Préciser la position de l ?élément dans la classification périodique : ligne et colonne.

Le nitrure de titane, par ses propriétés anti-corrosives, permet d'améliorer l'état de surface de certains métaux. Il est également utilisé pour ses propriétés mécaniques et électriques dans le domaine médical. Le nitrure de titane présente une structure analogue à celle du chlorure de sodium. Les atomes de titane constituent un réseau cubique à faces centrées (CFC) et les atomes d'azote occupent les sites octaédriques.

Q3. Représenter la maille élémentaire de NTi en perspective puis représenter un plan de face.

Q4. Déterminer la population en explicitant le calcul et vérifier la st$\frac{1}{2}$chiométrie du nitrure de titane.

Q5. La masse volumique du nitrure de titane est $\rho = 5,24\,\text{g.cm}^{-1}$. Exprimer puis calculer le paramètre de la maille, a.

Q6. Exprimer le rayon R_{Ti} de l'atome de titane en fonction du paramètre de maille. Faire l'application numérique.

Q7. Exprimer le rayon R_o d'un site octaédrique en fonction du paramètre de maille. Vérifier l'habitabilité pour l'atome d'azote.

I.2 Des anti-oxydants dans les crèmes solaires

Un anti-oxydant est une substance réductrice qui défend les cellules contre les molécules instables nommées radicaux libres générées par l'action des rayonnements UV.

La vitamine E et la vitamine C (ou acide ascorbique, de formule brute $C_6H_8O_6$) sont de puissants anti-oxydants : en neutralisant les radicaux libres, ces molécules contribuent à protéger la peau d'un vieillissement prématuré et à lutter efficacement contre l'apparition de mélanomes.

On propose d'étudier le titrage iodométrique de l'acide ascorbique contenu dans une poudre (p) intervenant comme matière première dans la fabrication d'un crème solaire.

Pour ce faire, on prépare les trois solutions ci-dessous :

- une solution (a) obtenue par dissolution de 500 mg de (p) dans 100 mL d'eau ;
- une solution (i) obtenue par dissolution de $1,250$ g de cristaux de diiode dans 100 mL d'eau ;
- une solution (t) obtenue par dissolution de $1,500$ g de cristaux de thiosulfate de sodium $Na_2S_2O_3$ dans 100 mL d'eau.

Dans un erlenmeyer, on introduit un volume $V_a = 20,0$ mL de solution (a). On note n_a la quantité d'acide ascorbique inconnue contenue dans ce prélèvement. On verse ensuite un volume $V_i = 30,0$ mL de solution (i). L'erlenmeyer est bouché, le mélange est agité puis laissé au repos pendant 15 minutes.

On dose ensuite le diiode en excès par la solution (t). Le volume obtenu à l'équivalence est $V_t = 19,4$ mL.

Q8. Donner les trois propriétés que doit vérifier une bonne réaction de dosage. On supposera dans la suite qu'elles sont vérifiées.

Q9. Expliquer pourquoi on ne peut pas doser directement l'acide ascorbique par le diiode.

Q10. Calculer les concentrations molaires C_i et C_t des solutions (i) et (t) en diiode et en ion thiosulfate $S_2O_3^{2-}$.

Q11. Écrire l'équation-bilan de la réaction supposée totale se produisant dans l'erlenmeyer avant le dosage, puis écrire l'équation-bilan de la réaction de dosage.

Q12. Exprimer n_a en fonction de C_i, C_t, V_i et V_t.

Q13. Déterminer le degré de pureté de la poudre (p) défini par la fraction massique de (p) en acide ascorbique.

II Capteur de mouvement

On considère un plan infini (assimilé au plan yOz) uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique positive de charges notée σ (figure 4).

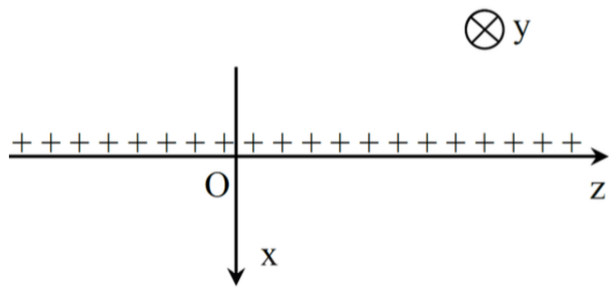


Figure 4 - Plan infini chargé

Q14. Déterminer le sens et la direction du champ électrostatique $\overrightarrow{E_1}(M)$ en un point M de coordonnées cartésiennes $(x,\, y,\, z)$. De quelle variable dépend ce champ ? Avec quelle unité exprime-t-on la norme du champ électrique ?

Q15. Déterminer l'expression du champ $\overrightarrow{E_1}(M)$ en tout point M de l'espace en fonction de la densité surfacique de charges σ, de la constante ϵ_0 et d'un vecteur unitaire à préciser.

On modélise à présent un condensateur par deux plans infinis uniformément chargés : le plan A d'équation $x = 0$ porte une densité surfacique de charges $+\sigma$ et le plan B d'équation $x = e$ porte une densité surfacique de charge $-\sigma$, σ et e étant des constantes positives.

Q16. Déterminer l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ créé par le condensateur en tout point de l'espace en fonction de σ et ϵ_0.

Q17. Établir l'expression de la différence de potentiel $U_{AB} = V_A - V_B$ en fonction de σ, e et ϵ_0.

On considère à présent un condensateur réel (figure 5), constitué de deux plaques identiques de surface S placées parallèlement l'une à l'autre et séparées par une distance e. Elles portent des charges égales en valeur absolue et opposées en signe. La différence de potentiel entre ces plaques est notées U. La distance e étant faible au regard de la taille des plaques, on peut supposer que le champ électrostatique entre les plaques est le même que celui engendré par deux plans infinis.

Q18. Définir la capacité C de ce condensateur. Donner son expression en fonction de S, e et ϵ_0.

Q19. Avec quelle unité exprime-t-on la capacité d'un condensateur ?

On s'intéresse maintenant à la détection de la mise en mouvement.

L'une des armatures est supposée fixe dans le référentiel terrestre galiléen. L'autre armature, mobile, de masse m, est reliée à l'armature fixe par un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k.
La position de l'armature mobile est repérée par la coordonnées $x(t)$, l'axe (Ox) étant vertical vers le bas (voir figure).

Au cours de son mouvement, l'armature mobile est également soumise à des frottements visqueux, modélisables par une force $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse de l'armature mobile et α un coefficient strictement positif.

Q20. Exprimer la longueur x_{eq} du ressort à l'équilibre.

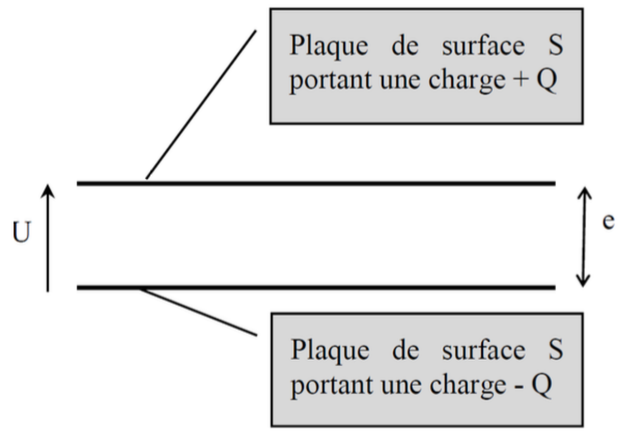
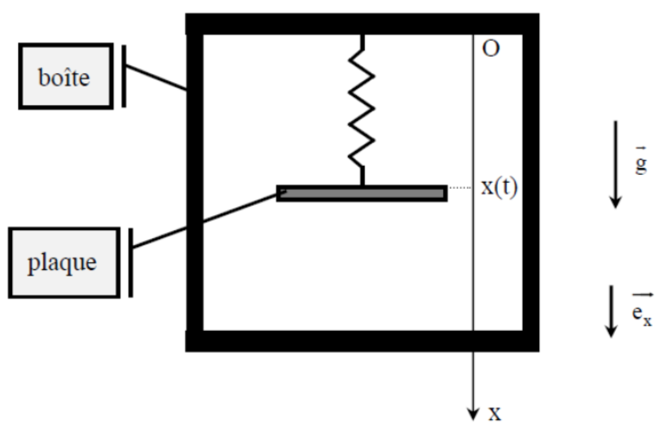


Figure 5 - Condensateur réel

Q21. L'armature mobile est écartée de sa position d'équilibre puis lâchée sans vitesse initiale depuis $x(t = 0) = x_0 > x_{eq}$. On observe qu'elle réalise plusieurs oscillations avant de revenir à sa position d'équilibre. Établir l'équation du mouvement en $x(t)$.

Q22. Exprimer la solution $x(t)$ de cette équation différentielle.

Q23. Exprimer la tension $U(t)$ aux bornes du condensateur en fonction de $x(t)$.



III Gravimétrie

La gravimétrie est l'étude des variations du champ de pesanteur dans l'espace et dans le temps. Elle permet de déterminer la répartition des masses au sein de la Terre et d'avoir ainsi accès à sa structure. Par exemple, la gravimétrie est utilisée pour déterminer la forme de la Terre (géodésie), pour détecter des cavités (génie civil ou archéologie), pour suivre les stockages d'eau (hydrologie continentale).

III.1 Étude d'un modèle gravimétrique de la Terre

Soit une boule de rayon R_b de centre O, portant une charge électrique répartie uniformément dans son volume, de densité volumique de charge ρ_0.

Q24. Déterminer la direction du champ électrostatique créé dans tout l'espace. De quelle(s) variable(s) dépend sa norme ? On introduira un système de coordonnées adapté.

Q25. Etablir l'expression du champ électrostatique en tout point de l'espace. En déduire le potentiel électrostatique dans tout l'espace. On prendra la référence de potentiel en $r \to +\infty$.

Q26. Représenter l'allure des lignes de champ électrostatique ainsi que les surfaces équipotentielles sur le même schéma.

Dans un premier modèle, on assimile la Terre à une boule de centre O, de rayon R_T et de masse M_T uniformément répartie en volume. Celle-ci est à l'origine d'un champ gravitationnel noté $\overrightarrow{g_T}$. On note μ_0 la masse volumique moyenne de la Terre (qui s'identifie ici à la masse volumique en chacun de ses points).

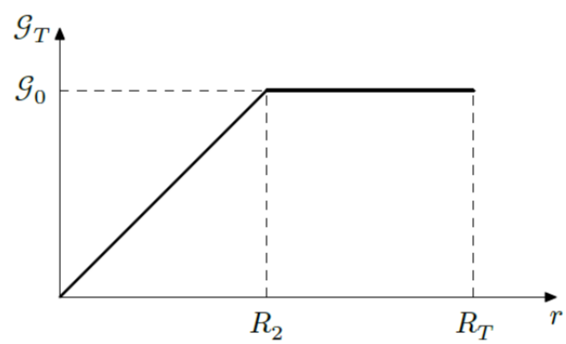
Q27. Expliciter l'analogie entre l'interaction électrostatique et l'interaction gravitationnelle et énoncer le théorème de Gauss gravitationnel.

Q28. En déduire le champ gravitationnel en tout point de l'espace.

Q29. Tracer sa norme en fonction de la distance au centre O.

Q30. Calculer sa valeur g_0 à la surface de la Terre.

Le modèle précédent ne tient pas compte de la structure interne de la Terre. On rencontre dans la littérature un second modèle, où la Terre est toujours assimilée à une boule de centre O et de rayon R_T avec une répartition à symétrie sphérique de centre O ; mais cette répartition est cette fois-ci inhomogène de sorte que la norme du champ gravitationnel interne en fonction de la distance r au centre O présente l'allure précisée figure ci-dessous. On distingue alors deux parties dans ce modèle : le noyau et le manteau terrestre.



Champ de gravitation terrestre à l'intérieur de la Terre pour un modèle (noyau + manteau).

On note toujours μ_0 la masse volumique moyenne de la Terre.

Q31. Justifier que la valeur g_0 à la surface de la Terre dans le cadre de ce modèle est inchangée par rapport au modèle précédent de boule homogène.

Q32. Déterminer la distribution de masse volumique $\mu(r)$ pour la Terre dans ce second modèle. L'exprimer en fonction de R_T, R_2 et μ_0 dans le noyau et en fonction de R_T, M_T et r dans le manteau.

Q33. Tracer l'allure de cette distribution de masse volumique $\mu(r)$ en précisant les valeurs numériques remarquables.

III.2 Application de la gravimétrie

Dans cette partie, nous allons déterminer, par une analyse gravimétrique, les dimensions d'un corps sphérique enterré dans un sol de masse volumique moyenne μ_m (figure 7).

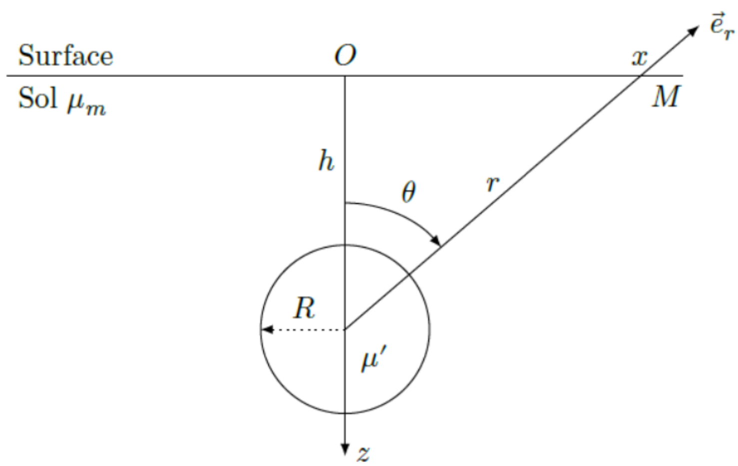


Figure 7

Le corps sphérique se trouve à une profondeur h dans le sol. C'est une boule homogène de rayon R et de masse volumique $\mu' = \mu_m + \Delta\mu$. Loin de la boule (pour $r \gg R$ avec r la distance au centre de la boule), le champ de gravitation est vertical selon (Oz) de valeur g_0.

On pourra réutiliser tout résultat des parties précédentes sans justification.

Q34. Exprimer le champ de gravitation $\overrightarrow{g}_B(M)$ créé par la boule (seule) en un point M situé à l'extérieur $(r > R)$ en fonction de μ_m, $\Delta\mu$, la constante de gravitation universelle $\mathcal{G}$, R, r et du vecteur unitaire $\overrightarrow{e}_r$.

Q35. Déterminer g_{Bz}, la composante verticale du champ de gravitation créé par la boule au point M situé à une distance x de l'axe, en fonction de x et de h.

Q36. Montrer que l'anomalie gravimétrique $\Delta g = g_z - g_0$, qui fait varier le champ de pesanteur apparent en un lieu, est identique au champ gravitationnel g'_z créé par une sphère de masse volumique $\Delta\mu$.

Q37. Montrer que l'anomalie gravimétrique s'écrit

$$\Delta g = \frac{4\pi\ \mathcal{G}\ \Delta\mu\ R^3 h}{3\ (x^2 + h^2)^{3/2}}$$

Q38. Tracer l'allure de Δg en fonction de x pour des sphères identiques enterrées à deux profondeurs différentes h_1 et $h_2 > h_1$.

Q39. Quel est le lien entre la profondeur h et la largeur à mi-hauteur de la courbe ? Que vaut l'anomalie gravimétrique maximale ?

Q40. Déterminer, à l'aide de la courbe de la figure 8, la profondeur h et le rayon R de la boule enterrée.

Q41. Comment rendre indétectable par analyse gravimétrique de l'or stocké dans une grotte sphérique ?

Q42. La grotte de 1m de rayon est à 4m de profondeur. Quelle masse d'or est-il possible de cacher par cette méthode ?

IV Données

- Masse molaire : $M(NTi) = 61,9\,\mathrm{g.mol^{-1}}$, $M(I_2) = 253,8\,\mathrm{g.mol^{-1}}$, $M(C_6H_8O_6) = 176,1\,\mathrm{g.mol^{-1}}$, $M(Na) = 23,0\,\mathrm{g.mol^{-1}}$, $M(Na_2S_2O_3) = 158,1\,\mathrm{g.mol^{-1}}$.
- Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02.10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
- Rayon de l'atome d'azote : $R(N) = 56\,\mathrm{pm}$
- Potentiel standard : $E°(C_6H_6O_6/C_6H_8O_6) = 0,13$ V ; $E°(I_2/I^-) = 0,54$ V ; $E°(S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}) = 0,08\,\mathrm{V}$
- Constante universelle de gravitation : $\mathcal{G} = 6,6710^{-11}\,\mathrm{m^3.kg^{-1}.s^{-2}}$
- Rayon de la Terre : $R_T = 6371\,\mathrm{km}$
- Masse de la Terre : $M_T = 5,972.10^{24}\,\mathrm{kg}$
- Masse volumique de l'or : $\rho_{or} = 19300\,\mathrm{kg.m^{-3}}$
- Unité de mesure de la pesanteur : 1 gal $= 1,00\,\mathrm{cm.s^{-2}}$