

Devoir maison n°6

le 3 mars 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Chaque partie sera rédigée sur une nouvelle copie double.

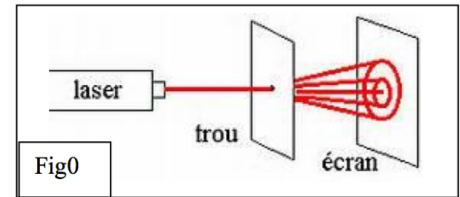
Partie I - Mesures interférométriques

A - Trou d'Young

Un laser envoie un faisceau parallèle et monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 sur un trou de faible diamètre d percé dans un écran π_0 . On observe la figure 1 sur un écran π_E placé à la distance D de π_0 (π_0 et π_E sont parallèles).

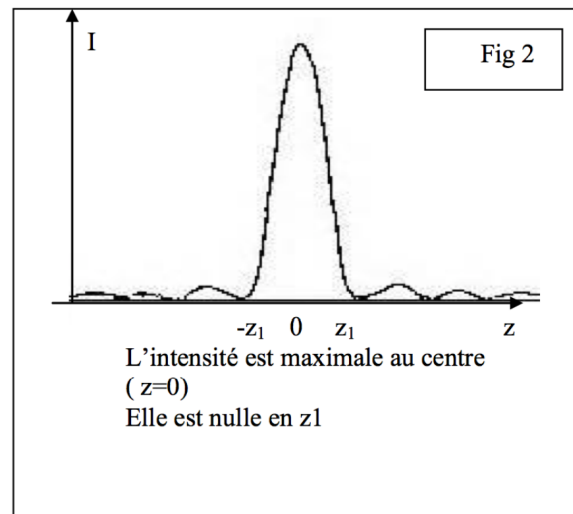
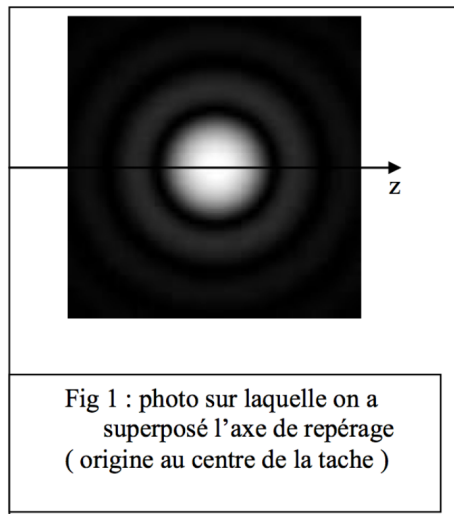
Le faisceau incident se propage dans l'air assimilé à du vide dans la direction $X'X$ perpendiculaire aux plans.

On associe au plan π_E un repère $(y'y, z'z)$.



1. La figure 2 donne, en fonction de z , l'intensité lumineuse I observé sur π_E .

1- a) Quel est le phénomène physique mis en jeu ?



1- b) Le rayon R de la tache centrale, supposé égal à z_1 , est donné par une des relations suivantes :

$$K \frac{\lambda_0 D}{d} \quad \text{ou} \quad K \frac{\lambda_0 D}{d^2} \quad \text{ou} \quad K \frac{\lambda_0 d}{D}$$

Ecrire la bonne réponse en justifiant brièvement les raisons de votre choix.

(K est une constante sans dimension dépendant de la géométrie et dont la valeur approchée est $K = 1,22$ pour un trou circulaire).

2. On peut considérer que le trou d'Young se comporte comme une source lumineuse, notée S , quasi ponctuelle, émettant de la lumière dans un cône d'ouverture θ correspondant à la tache centrale de la figure 1.

a) Donner l'expression littérale de θ .

b) Tracer, en fonction de z , le profil de l'intensité lumineuse sur π_E en supposant que la zone éclairée l'est uniformément.

c) Comparer ce profil et la figure 2. Conclure en 5 lignes maximum sur la validité de ce modèle.

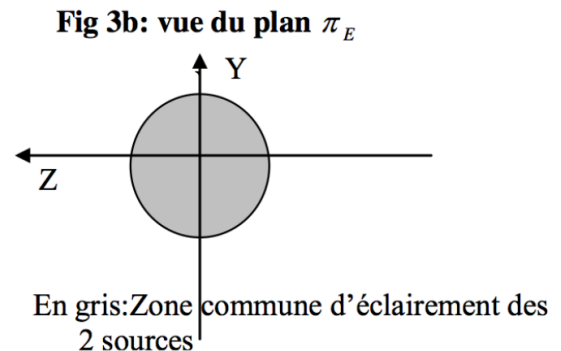
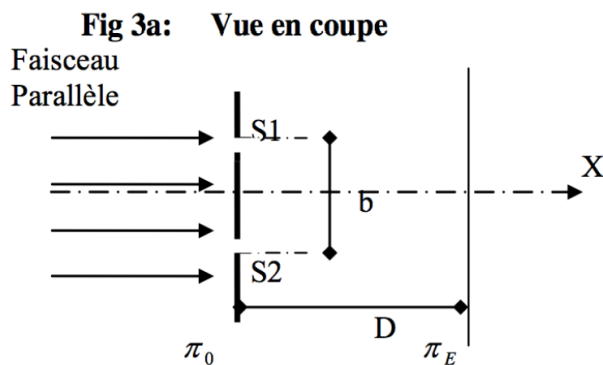
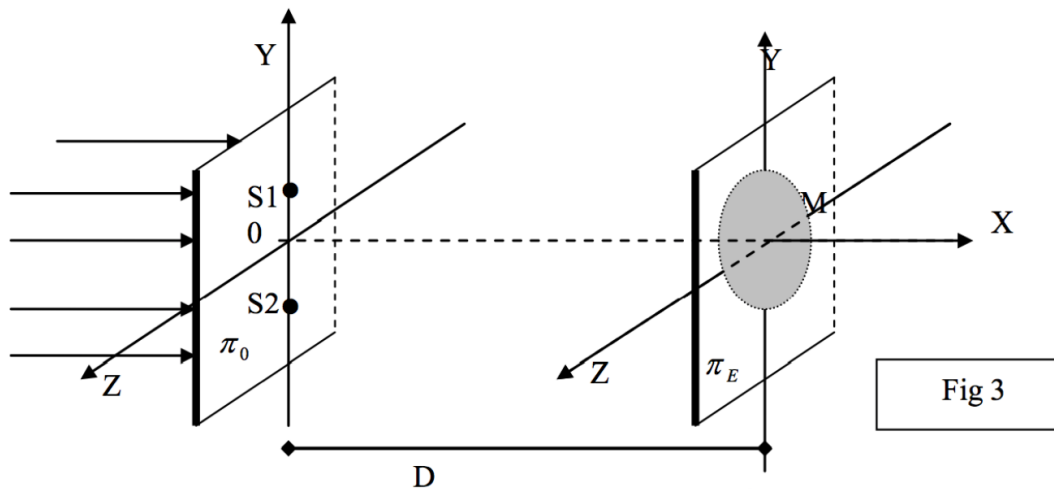
Dans toute la suite, les trous d'Young seront assimilés à de telles sources ponctuelles.

B - Dispositif interférentiel à deux trous d'Young

Le dispositif est le même qu'en A-I, mais le faisceau arrive sur deux trous d'Young percés dans le plan π_0 (fig.3). Ces trous d'Young, éclairés par un faisceau incident parallèle se propageant dans la direction OX , se comportent comme deux sources lumineuses S_1 et S_2 ponctuelles, monochromatiques, synchrones, cohérentes, distantes de b (fig 3a); ces deux sources émettent de la lumière de longueur d'onde dans le vide λ_0 . Elles sont symétriques par rapport à l'axe OX .

On utilise le repère $(OXYZ)$, l'origine O étant au milieu de S_1S_2 (fig.3). On observe des interférences dans la zone commune d'éclairement du plan π_E . Cette zone est sensiblement un disque de rayon $R = 1$ cm (fig.3 et 3b).

On s'intéresse aux phénomènes en un point $M(x = D, y, z)$ du plan.



1. Préciser la signification des termes "synchrone" et "cohérent".

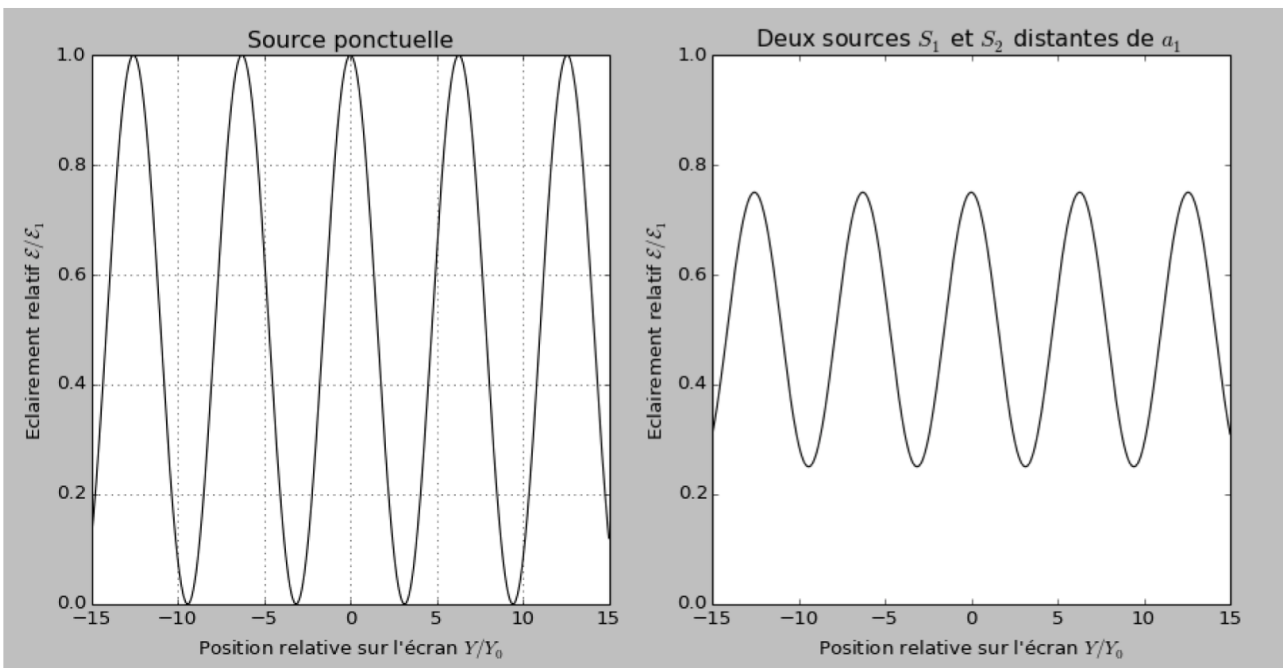
2. Les distances séparant les sources du point M (de coordonnées (D, y, z)) sont notées respectivement $d_1 = S_1M$ et $d_2 = S_2M$.

- 2.a) Evaluer d_2 et d_1 en fonction de y , z , D et b .
 2.b) En déduire la différence de chemin optique δ lorsque y , z et b sont très petits devant D .
3. Donner l'expression de l'intensité lumineuse au point M .
4. Reproduire et compléter la fig 3b en dessinant l'allure géométrique des franges d'intensité maximale.
5. Evaluer le nombre N de franges d'intensité maximale observables avec : $\lambda = 500$ nm, $b = 2$ mm et $D = 2$ m.

C - Source élargie

On souhaite étudier l'influence de la taille de la source sur la figure d'interférence obtenue avec un dispositif de trous d'Young (fig.4)

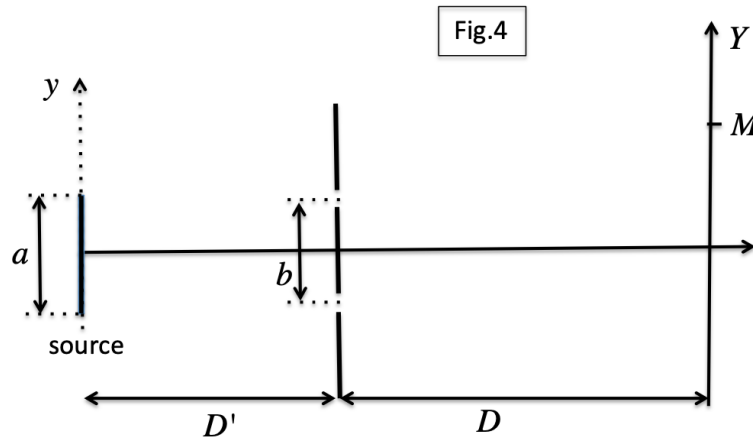
1. Dans un premier temps, on place une source ponctuelle à la distance D' des trous d'Young, sur l'axe Ox , puis on remplace cette source par deux sources ponctuelles S_1 et S_2 placées en $y = -a/2$ et $y = a/2$, chacune d'elle étant deux fois moins lumineuse que S .
 On enregistre l'intensité $\mathcal{E}(M)$ sur le plan d'observation pour la source ponctuelle S puis pour les deux sources ponctuelles distantes de a . (Voir courbes donnant l'intensité normalisée).



- 1.a) Que vaut la visibilité des franges dans les deux cas? Quel est le nom du phénomène qui est mis en jeu? Expliquer en quelques lignes l'origine du phénomène observé.
- 1.b) Déterminer, sans faire le calcul de l'éclairement résultant, quelle est la plus petite valeur de a pour laquelle on aurait un éclairement uniforme sur l'écran. On utilisera les notations de la figure 4.
2. On utilise maintenant une source élargie de largeur a dans le montage précédent (fig.4). L'intensité totale de la source est supposée inchangée.

On décompose cette source élargie en une infinité de sources infinitésimales.

- 2.a) Ces sources sont-elles cohérentes entre elles?



2.b) Calculer la différence d'ordre d'interférence en un point M de l'écran pour une source élémentaire placée en $y_s = \xi$ et pour une source placée en $y_s = -\frac{a}{2} + \xi$, $\xi \in [0, a/2]$.

2.c) En déduire la plus petite valeur de a pour laquelle le contraste (ou visibilité) des franges sera nul.

D - Mesure d'indice de réfraction

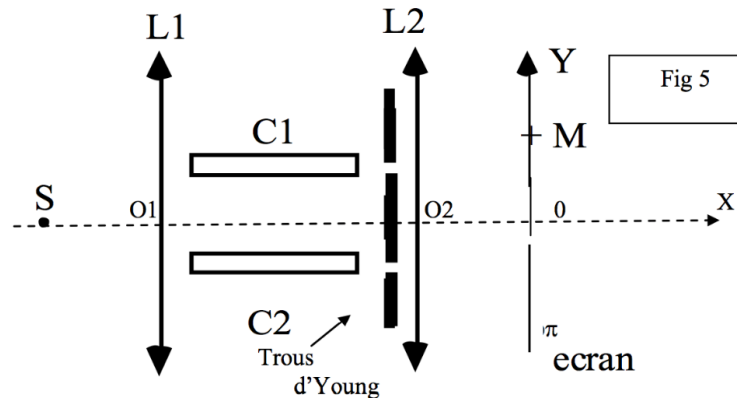
Le dispositif de mesure comprend une source de lumière monochromatique S , ponctuelle, de longueur d'onde dans le vide λ_0 , placée au foyer objet d'une lentille convergente (L_1) (fig.5).

Entre les deux lentilles (L_1) et (L_2), identiques, de distance focale f' , on dispose deux cuves $C1$ et $C2$ identiques de longueur L .

Deux fentes d'Young séparées de la distance b sont placées avant (L_2) symétriquement par rapport à l'axe SO . On observe sur un écran π dans le plan focal image de (L_2).

Les points S et O sont sur l'axe optique commun de (L_1) et (L_2).

La cuve $C2$ contient de l'air d'indice optique n_a ; la cuve $C1$ contient un gaz d'indice optique n_1 .



1. Déterminer la différence de chemin optique entre une onde issue de S arrivant en M en étant passée par $C2$ et celle qui est passée par $C1$. On justifiera de manière précise, à l'aide de schémas, les raisonnements utilisés. On donnera le résultat en fonction de n_a , n_1 , b , f' , L et l'ordonnée Y de M sur π .

2. Déterminer l'interfrange i' sur l'écran.

3. Un capteur placé en O ($y = 0$) est couplé à un compteur qui s'incrémente de 1 unité à chaque détection d'une frange brillante. On part d'un état initial où les cuves $C1$ et $C2$ sont remplies d'air.

3.a) Quel est l'ordre d'interférence p_0 initial en O ?

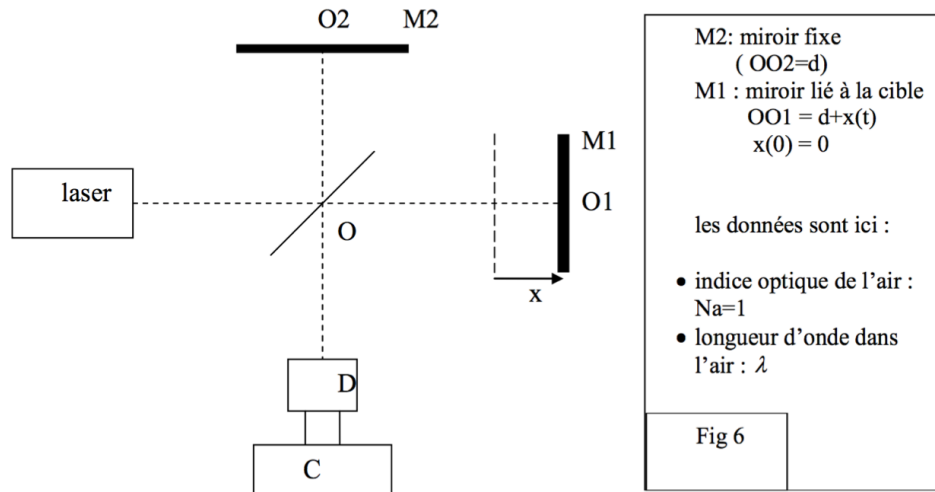
3.b) On remplace progressivement l'air de la cuve C1 par du gaz d'indice n_1 ($n_1 > n_a$). Lorsque C1 est uniquement rempli de ce gaz, le détecteur s'est incrémenté de k unités. Préciser le nouvel ordre d'interférence en $Y = 0$ et le sens dans lequel le système de franges a défilé. On attend ici une réponse argumentée.

3.c) Déterminer l'expression littérale de n_1 en fonction de n_a , k , L et λ_0 .

3.d) Avec $L = 1,00$ m, $k = 100$, $n_a = 1,0002926$ et $\lambda_0 = 500$ nm, on obtient $n_1 = 1,0003426$. Pour chaque grandeur, on admet une erreur absolue de 1 sur le dernier chiffre indiqué. Combien de chiffres significatifs doit-on conserver dans l'expression du résultat de n_1 (réponse argumentée requise).

E - Suivi de déplacement

On utilise un dispositif de Michelson à deux miroirs parfaitement orthogonaux éclairés par un fin pinceau lumineux monochromatique émis par un laser. On se ramène au modèle dans lequel la séparatrice, inclinée à 45° est idéale : elle est semi-réfléchissante, infiniment mince et n'introduit aucun déphasage (fig.6).



1. Déterminer l'intensité lumineuse I arrivant sur le détecteur D ; montrer qu'elle se compose d'un terme constant et d'un terme variable lié au déplacement $x(t)$.

2. Le détecteur D élimine la composante constante du signal et donne une tension U_d proportionnelle à la composante variable de l'intensité I .

Montrer que $U_d = U_0 \cos \Phi$ et expliciter Φ en fonction de x et des données.

3. Le détecteur D est couplé à un compteur C incrémenteur de franges (cf IV-3). Le compteur est à 0 lorsque $x = 0$.

3.a) On envisage un déplacement de la cible toujours dans le même sens sur une longueur $L = 200\lambda$. Quelle sera l'indication du compteur ?

3.b) On envisage à présent un déplacement de $L_1 = 100\lambda$ dans un sens et $L_2 = 100\lambda$ en sens inverse. Donner l'abscisse finale de la cible et l'indication du compteur dans ce cas.

3.c) A quelle grandeur accède-t-on finalement par ce dispositif interférentiel ?

3.d) Dans quelle plage de valeurs peut-on faire varier x si la largeur spectrale de la source donnée en fréquence vaut $\Delta\nu$?

4. lame à retard.

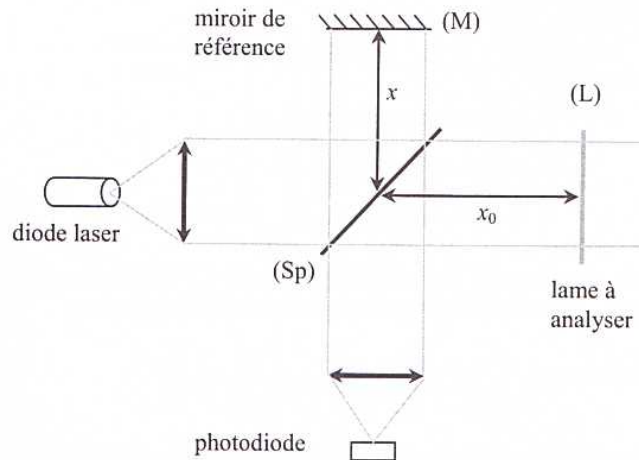
On interpose sur le bras OO_2 , une lame d'indice n et d'épaisseur e , dans le but que le détecteur D délivre la tension $U_d = U_0 \sin \Phi$, Φ ayant la même expression que celle trouvée en 2°.

Donner l'expression littérale des épaisseurs possibles de la lame pour qu'il en soit ainsi.

Partie II - Tomographie optique

La tomographie est une technique d'imagerie, très utilisée en imagerie médicale, géophysique, etc... Elle permet de reconstruire le volume d'un objet à partir d'une série de mesures effectuées par tranche depuis l'extérieur de cet objet. La tomographie par cohérence optique (OCT : Optical Coherence Tomography) est un système moderne d'imagerie optique basé sur l'interférométrie en lumière peu cohérente. L'OCT est utilisé depuis les années 2000 en ophtalmologie car elle permet d'obtenir des images du fond de l'oeil en trois dimensions, très utile pour détecter ou suivre certaines maladies ou dégénérescences oculaires. Ce problème propose de comprendre les principes généraux de l'OCT.

Le dispositif optique d'un OCT est analogue à un interféromètre de Michelson. Afin de faciliter la compréhension, on raisonne dans un premier temps sur le schéma simplifié suivant.



La lame séparatrice (S_p) et le miroir (M) sont supposés parfaits. La lame à analyser (L), supposée infiniment fine, possède un coefficient de réflexion en amplitude (pour le champ scalaire associé à l'onde lumineuse) noté r . C'est-à-dire que l'amplitude de l'onde réfléchie par la lame est $s_r = r s_0$ lorsqu'on note s_0 l'amplitude de l'onde incidente.

Le but est de déterminer par mesure interférométrique la valeur de r et la distance x_0 de la lame (L) au centre de (S_p). Pour cela, on utilise une diode laser polychromatique émettant de manière uniforme sur une bande spectrale en longueur d'onde de largeur $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, avec λ_2 et λ_1 les limites du spectre de la diode laser.

Pour les calculs, on s'attachera à utiliser le nombre d'onde σ défini par $\sigma = \frac{1}{\lambda}$. On note σ_0 le nombre d'onde moyen de ce spectre et on suppose que $\Delta\sigma \ll \sigma_0$. La diode laser polychromatique éclaire l'interféromètre de Michelson en incidence normale sur la lame à analyser, et on observe les interférences avec une photodiode au foyer image d'une lentille convergente.

Le dispositif est supposé réglé en lame d'air.

A- Influence du coefficient de réflexion de la lame étudiée

A.1. Expliquer la signification de la dernière phrase : "Le dispositif est supposé réglé en lame d'air." Déterminer alors l'expression de la différence de marche au foyer F' de la lentille où est placée la photodiode. En déduire

l'ordre d'interférence pour une onde monochromatique de nombre d'onde σ .

A.2. On considère deux ondes cohérentes $s_1(M, t)$ et $s_2(M, t)$ d'amplitudes S_1 et S_2 qui interfèrent en un point M. Etablir la formule de Fresnel, donnant l'éclairement $\mathcal{E}(M)$ en fonction du déphasage entre deux ondes.

A.3. On se place dans le cas de l'interféromètre décrit ci-dessus. On note $\mathcal{E}_0$ l'éclairement qui serait obtenu sur la photodiode si seule la lumière réfléchiée sur le miroir (M) y arrivait. Exprimer l'éclairement $\mathcal{E}_1$ obtenu sur la photodiode en fonction de $\mathcal{E}_0$, de r le coefficient de réflexion en amplitude de la lame ainsi que de x et x_0 .

A.4. Exprimer la visibilité V de la figure d'interférence en fonction de r .
Quelle est la valeur de r permettant d'avoir le maximum de visibilité ?

A.5. Montrer que l'on peut déterminer r à partir des mesures de l'éclairement minimum et de l'éclairement maximum obtenus sur la photodiode.

B- Influence de la largeur spectrale de la source

B.1. Définir la longueur de cohérence temporelle l_c d'une source lumineuse. Donner son expression en fonction de c célérité de lumière dans le vide et $\Delta\nu$ étendue spectrale en fréquence de la source.

Donner un ordre de grandeur de l_c pour : une lampe à incandescence, une lampe au mercure, un laser hélium-néon (laser rouge utilisé en travaux pratiques).

B.2. Exprimer la longueur de cohérence temporelle de la source en fonction de $\Delta\lambda$ et λ_0 la longueur d'onde moyenne de la source, puis de $\Delta\sigma$.

B.3. A quelle condition, sur la différence de marche y a-t-il interférence ? En déduire l'intervalle de positions x pour lequel les interférences sont visibles, x_0 étant fixé.

C- Imagerie TD-OCT

On étudie ici la tomographie TD-OCT (time domain) : le principe est de mesurer l'éclairement $\mathcal{E}$ reçue par la photodiode en faisant varier la distance x du miroir de référence. L'alternance de franges brillantes et sombres va alors être visible uniquement sur un intervalle restreint de valeurs de x .

On considère la source comme une superposition de sources quasi monochromatiques de nombre d'onde σ et de largeur infinitésimale $d\sigma$. Chacune de ces sources élémentaires produira sur le détecteur l'éclairement $d\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1(x, \sigma)}{\Delta\sigma} d\sigma$. Avec $\mathcal{E}_1(x, \sigma)$ l'éclairement dû aux interférences pour la source de nombre d'onde σ calculé en A.3.

C.1. Montrer que l'éclairement reçu par la photodiode peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_0 (1 + r^2 + 2r \sin_c(2\pi(x - x_0)\Delta\sigma) \times \cos(4\pi(x - x_0)\sigma_0)) \quad (1)$$

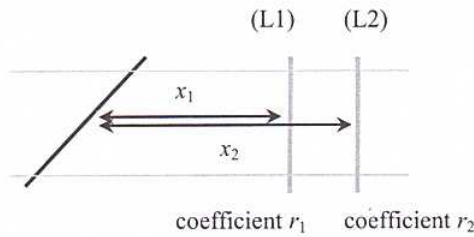
où la fonction « sinus cardinal » est définie par $\sin_c(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

On rappelle que : $\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p - q}{2}\right) \cos\left(\frac{p + q}{2}\right)$

C.2. Représenter les variations de la visibilité $V(x) = \sin_c(2\pi(x - x_0)\Delta\sigma)$ Sur quel intervalle cette fonction a-t-elle des valeurs non négligeables ?

Comparer ce résultat à celui obtenu à la question B.3.

C.3. Tracer l'allure la fonction $\mathcal{E}(x)$ et expliquer comment l'exploitation du graphe permet d'avoir accès à la valeur de x_0 et de r .



Pour comprendre comment l'OCT permet de sonder un échantillon en profondeur, on remplace la lame (L) par deux lames (L_1) et (L_2) non absorbante. C'est-à-dire que pour chaque lame $t_i^2 + r_i^2 = 1$ avec t_i le coefficient de transmission et r_i le coefficient de réflexion de la lame i . On note x_1 et x_2 les positions respectives des lames et on suppose que $r_1 \ll 1$ et $r_2 \ll 1$.

C.4. Reproduire et compléter le tableau suivant rassemblant l'amplitude de l'onde incidente avec les amplitudes des ondes ayant subi une ou plusieurs réflexions à travers le système des deux lames (L_1) et (L_2). Les réponses seront données en fonction de s_0 , r_1 , r_2 , t_1 et t_2 .

	Onde incidente	1 réflexion par (L_1)	1 réflexion par (L_2)	2 réflexions par (L_1)	2 réflexions par (L_2)
Amplitude	s_0				

C.5. Expliquer pourquoi les hypothèses $r_1 \ll 1$ et $r_2 \ll 1$ permettent de ne considérer que les deux ondes réfléchies une seule fois soit par (L_1), soit par (L_2) parmi toutes celles qui sont réfléchies par le système.

C.6. Quel est la plage de valeurs de x pour laquelle on observe des interférences dues à la lame (L_1)? Même question pour la lame (L_2).

En déduire le plus petit écart $|x_2 - x_1|$ pour lequel les deux lames sont discernables (appelé résolution), par la méthode TD-OCT.

C.7. Pour un couple de lames, on réalise deux enregistrements, avec deux sources différentes. On obtient les résultats suivants, où l'échelle des abscisses est en μm .

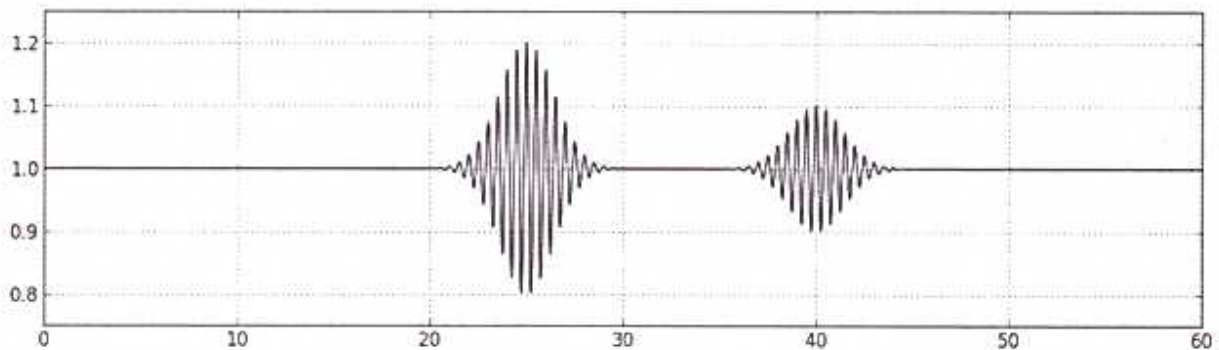


FIGURE 1 – Essai A

- Pour l'un des essais, la largeur spectrale en nombre d'onde de la source était de $\Delta\sigma = 2500 \text{ cm}^{-1}$, pour l'autre de $\Delta\sigma = 500 \text{ cm}^{-1}$. A quelle largeur spectrale correspond l'essai A ?
- Déterminer la position des deux lames L_1 et L_2 .
- Déterminer leurs coefficients de réflexion.
- Déterminer la largeur spectrale limite de la source permettant de séparer les deux lames.

Aide au calcul : $\sqrt{\frac{1,2}{0,8}} = 1,22$; $\sqrt{\frac{1,1}{0,9}} = 1,11$; $\frac{1}{15} = 0,067$

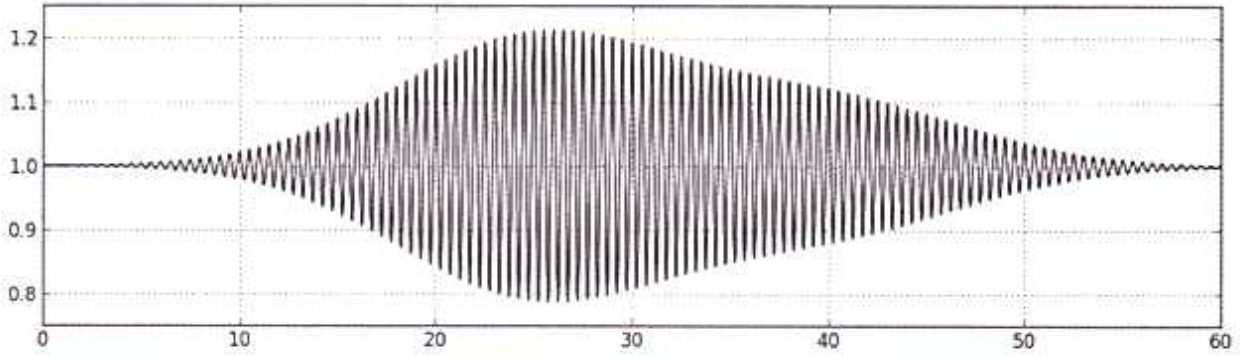
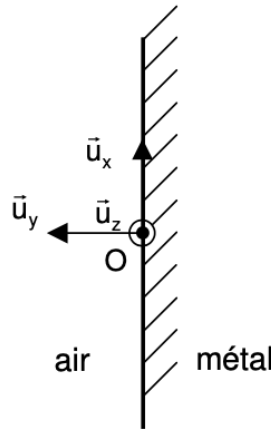


FIGURE 2 – Essai B

Partie III - Réflexion d'une OPPH sur une plaque métallique

On considère une plaque métallique conductrice, de grandes dimensions considérées comme infinies suivant Ox et Oz , de conductivité γ , de perméabilité μ_0 et de permittivité ϵ_0 , occupant tout le demi-espace $y < 0$, comme le montre la figure 1 ci-dessous.



On envoie une OPPH (onde plane progressive harmonique) incidente, de polarisation rectiligne, notée $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$ sur cette plaque métallique, le vecteur d'onde de l'onde incidente étant $\vec{k}_i = -k\vec{e}_y$ ($k > 0$). Le champ électrique associé à l'onde incidente a pour expression :

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega.t + ky) \vec{e}_x.$$

Le trièdre trirectangle $Oxyz$ est direct, l'axe Oy est orienté vers la gauche.
Données numériques :

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1} \quad c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

A - Réflexion sur un plan conducteur parfait

Dans toute cette partie A, la conductivité γ est supposée infinie ; le métal est alors considéré comme un conducteur parfait.

A1. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide, en l'absence de charges et en l'absence de courants.

A2. Etablir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide. Comment s'appelle ce type d'équation ? Quelle relation existe entre la vitesse de propagation c et les constantes ε_0 et μ_0 ?

A3. Traduire le fait que le champ $\vec{E}_i$ satisfait à cette équation aux dérivées partielles : quelle relation lie ω , k et c ?

A4. Quelle est l'expression du champ magnétique incident $\vec{B}_i$? Préciser son amplitude B_0 . Quelle équation de propagation vérifie le champ $\vec{B}_i$?

On cherche une onde réfléchie sous la forme d'une OPPH, de polarisation rectiligne, notée $(\vec{E}_r, \vec{B}_r)$ et de vecteur d'onde $\vec{k}_r$. En surface du métal ($y = 0$) règnent une densité surfacique de charge σ et un courant surfacique $\vec{j}_s$, uniforme et non permanents.

A5. Quelles sont les unités de σ et de $\vec{j}_s$? Que valent les champs électrique et magnétique dans le métal ? Quelles sont les deux relations de passage en $y = 0$? Quelle composante du champ électrique est toujours continue à la traversée d'une surface ?

A6. Pourquoi les ondes incidentes et réfléchies ont-elles la même fréquence ? Quelle relation lie ici $\vec{k}_r$ à $\vec{k}_i$? Détailler le raisonnement.

A7. Etablir l'expression du champ $\vec{E}_r$ en tout point du plan $y = 0^+$, puis en déduire celles de $\vec{E}_r$ et de $\vec{B}_r$ en tout point du demi-espace $y > 0$.

A8. Que vaut le champ électromagnétique total $(\vec{E}_{tot}, \vec{B}_{tot})$ résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie ? Quelle est sa particularité ?

A9. Quelle propriété particulière possède le plan $y = 0$ vis-à-vis du champ électromagnétique total ? En déduire les expressions de σ et de $\vec{j}_s$. Donner une interprétation qualitative des résultats obtenus.

A10. Quelle est l'énergie volumique associée à l'onde incidente ? Même question pour l'onde réfléchie. Comparer les résultats.

A11. Quelle puissance instantanée P_i apportée par l'onde incidente traverse une surface S orthogonale à la direction de propagation ? Même question pour l'onde réfléchie P_R . Comparer ces résultats à ceux obtenus à la question **A10.** Commenter.

A12. Comparer les moyennes temporelles de P_i et de P_R ; commenter physiquement.

B - Réflexion de l'onde avec prise en compte de la conductivité du métal

En réalité le métal de la plaque de la figure 1 a une conductivité qui n'est pas infinie ce qui permet au champ électromagnétique de pénétrer dans le métal ; il sera noté $(\vec{E}_t, \vec{B}_t)$. Les résultats suivant seront admis : en posant

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} \text{ il vient, lorsque } \delta.k \ll 1, \text{ avec } k = \frac{\omega}{c},$$

$$\vec{E}_t = \sqrt{2k\delta E_0} e^{\frac{+y}{\delta}} \cos\left(\omega.t + \frac{y}{\delta} + \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_x \text{ et } \vec{B}_t = 2\frac{E_0}{c} e^{\frac{+y}{\delta}} \cos\left(\omega.t + \frac{y}{\delta}\right) \vec{e}_z$$

Le courant surfacique est alors nul ; dans le métal règne une densité de courant $\vec{j}$ et une densité de charge $\rho = 0$.

Donnée numérique : $\gamma = 10^7 \text{ S.m}^{-1}$.

B1. Quelle est la dimension de δ ? Que représente cette grandeur ? Application numérique : représenter le courbe $\log(\delta)$ en fonction de $\log(\omega)$ pour $1 \text{ rad.s}^{-1} < \omega < 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$.

B2. Rappeler l'expression - en fonction de $\vec{j}$ et de $\vec{E}$ - de la puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à la matière et, en appliquant la loi d'Ohm locale dans le métal, évaluer sa moyenne temporelle. En déduire la puissance moyenne totale $\langle P_J \rangle$ dissipée dans la portion de cylindre d'axe Oy , de section S et délimitée par les plans $y = 0$ et $y = -L$, avec $L \gg \delta$.

B3. Déterminer la puissance moyenne $\langle P_t \rangle$ rayonnée par l'onde transmise à travers la section droite d'abscisse $y = 0^-$; comparer au dernier résultat de la question **B2.** ; commenter en détails. Que remarquerait-on si, la pulsation étant fixée, on faisait tendre la conductivité vers l'infini ? Commenter.

B4. Ecrire la relation de passage en $y = 0$ pour le champ électrique, et en déduire, pour tout $y > 0$, le champ $\vec{E}_r$, de l'onde électromagnétique réfléchie, puis le champ $\vec{B}_r$.

B5. Quelle est la puissance moyenne $\langle P_R \rangle$ rayonnée par l'onde réfléchie à travers une surface S orthogonale à la direction de propagation ?

B6. En limitant l'analyse aux termes de degré inférieur ou égal à 1 en $k\delta$ (ne pas oublier que $k\delta \ll 1$), quelle relation simple obtient-on entre les puissances moyennes rayonnées $\langle P_i \rangle$ (voir question **A12.**), $\langle P_R \rangle$ (voir question **B5.**), et $\langle P_t \rangle$ (voir question **B3.**). Commenter.

Partie IV - Réflexion d'une OPPH sur une plaque métallique

Mesures optiques de propriétés mécaniques

Ce sujet comporte deux parties indépendantes présentant des méthodes de mesures fines utilisant divers dispositifs optiques. La partie I décrit une structure courante de l'univers, les étoiles binaires, avant de présenter une méthode interférométrique pour mesurer leur écart angulaire. La partie II s'intéresse à la structure fine des raies d'émission de l'atome d'hydrogène et à leur mesure interférométrique. Les deux méthodes optiques présentées ici ont en commun leur premier auteur, le physicien américain Albert Michelson.

Pour toutes les applications numériques, on se contentera de deux chiffres significatifs. Les données nécessaires, accompagnées d'un formulaire utile à la simplification des relations trigonométriques, sont regroupées en fin d'énoncé.

I Les étoiles binaires et leur mesure

Cette partie comporte deux problèmes I.A et I.B, qui sont totalement indépendants. En astronomie, on parle d'étoile double pour une paire d'étoiles qui apparaissent comme proches l'une de l'autre dans le ciel lorsqu'on les observe depuis la Terre. Dans certains cas il s'agit d'un système binaire d'étoiles en orbite mutuelle : elles tournent toutes les deux autour de leur barycentre commun sous la seule action des forces gravitationnelles. Dans d'autres cas, leur alignement est simplement fortuit et ce cas ne nous concerne pas dans ce qui suit.

I.A Structure gravitationnelle d'une étoile binaire

I.A.1 Un premier modèle très simple

On étudie le système formé de deux étoiles assimilées à deux points matériels A et B , de même masse M , toutes les deux en orbite circulaire de rayon r autour de leur barycentre commun O , lui-même immobile dans le référentiel galiléen d'étude ($Oxyz$) (figure 1). On note $\mathcal{G}$ la constante de la gravitation universelle.

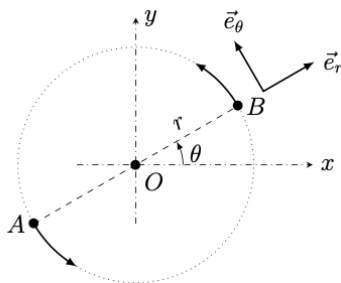


FIGURE 3 – Étoile binaire symétrique en mouvement circulaire

1. Exprimer les forces $\vec{F}_B$ et $\vec{F}_A$ exercées au sein du système en fonction notamment de M et r . Donner l'expression de l'énergie potentielle $E_p(r)$ associée à ces forces.
2. Exprimer la période T_1 du mouvement des deux composantes de l'étoile binaire en fonction de r , M et $\mathcal{G}$.
3. Application Numérique : Le système est formé de deux étoiles de même masse que le Soleil, distantes l'une de l'autre de la même distance que la distance moyenne Terre-Soleil (dite unité astronomique UA). Calculer la valeur de la période T_1 associée que l'on exprimera en années terrestres.
4. Exprimer, en fonction de $\mathcal{G}$, M et r , l'énergie mécanique totale du système. Commenter brièvement le signe de l'expression obtenue.

I.A.2 Généralisation partielle du modèle

On étudie maintenant, relativement au référentiel galiléen (Ωxyz) , le mouvement du système binaire formé de deux étoiles ponctuelles A et B de masses $m_A \geq m_B$. On notera $\vec{R} = \overrightarrow{AB}$ leur position relative et $R = \|\vec{R}\|$. Le vecteur $\vec{R}$ est a priori variable (figure 2) ; le barycentre des deux étoiles, noté G , est donc aussi mobile.

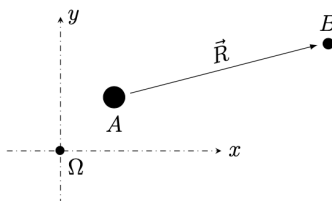


FIGURE 4 – Étoile binaire quelconque en mouvement arbitraire

1. Exprimer en fonction de m_A , m_B , $\mathcal{G}$ et $\vec{R}$ les forces $\vec{F}_B$ et $\vec{F}_A$ exercées sur les deux étoiles. Ces forces dépendent-elles du référentiel d'étude ?
2. Montrer que le référentiel $(Gxyz)$ est également galiléen. Toute la suite de l'étude sera menée relativement à ce nouveau référentiel.
3. Établir les relations $\overrightarrow{GB} = \frac{m_A}{m_A + m_B} \vec{R}$ et $\overrightarrow{GA} = -\frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{R}$. En déduire la relation $\frac{d^2}{dt^2} \vec{R} = -K \frac{\vec{R}}{R^n}$ et expliciter les constantes K et n .
4. Si l'étoile binaire forme un système lié, justifier que son mouvement est périodique et déterminer l'expression de la période T_2 du mouvement en fonction notamment des deux masses et d'une longueur que l'on précisera.

I.B Mesure de l'écartement angulaire des étoiles doubles

Lorsque les deux étoiles sont très proches, elles peuvent être difficiles à distinguer. L'étude menée ici sera faite dans le domaine visible et on prendra pour longueur d'onde $\lambda_0 = 550 \text{ nm}$ d'un éclairage supposé ici monochromatique, avec un télescope constitué d'un miroir parabolique (dont on admettra qu'il est équivalent à une lentille mince, unique et convergente) de distance focale $f' = 33 \text{ m}$ et de diamètre d'ouverture $d = 5 \text{ m}$. On rappelle l'expression $\sin \theta \sim \lambda_0/d$ reliant l'échelle angulaire du phénomène de diffraction et la taille caractéristique de l'ouverture diffractante.

1. En déduire la valeur du pouvoir séparateur (ou résolution angulaire) du télescope utilisé. Montrer qu'un système binaire formé de deux étoiles distantes d'une unité astronomique ne peut pas être séparé s'il est, par rapport à l'observateur, distant de $L > L_{\text{max}}$. Déterminer la valeur de L_{max} en années-lumière.

Lorsque la distance à laquelle se trouve le système double est trop élevée pour pouvoir en offrir une image bien séparée, on peut utiliser un dispositif interférométrique comme celui installé en 1920 par Michelson et Pease devant le télescope américain Hooker (figure 3).

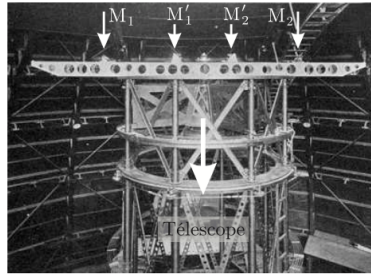


FIGURE 5 – Le dispositif interférométrique réel

Le schéma décrivant le dispositif est proposé figure 4. On y remarquera que l'axe du télescope y est représenté horizontal pour plus de lisibilité et que ce dernier a été remplacé par une lentille équivalente.

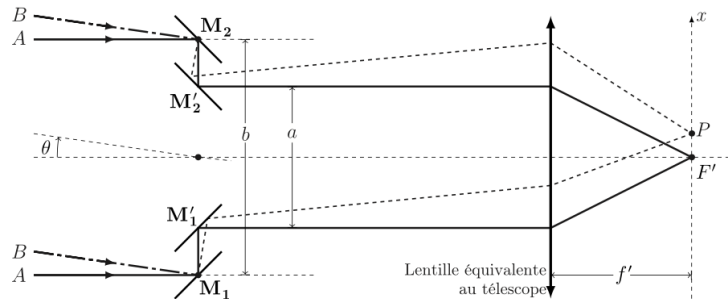


FIGURE 6 – Le schéma équivalent au dispositif interférentiel

Le faisceau parallèle issu de l'étoile A parvient dans la direction de l'axe optique sur le système, avant d'être réfléchi et diffracté par les miroirs $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$. Les miroirs auxiliaires $\mathbf{M}_1'$ et $\mathbf{M}_2'$ renvoient ces faisceaux vers le télescope avant de converger dans son plan focal image, au point F' pour le faisceau non diffracté et en d'autres points P pour le faisceau diffracté.

1. Rappeler l'énoncé du théorème de Malus (ou de Malus et Dupin). En déduire l'expression de la différence de marche $\delta_A = (AM_1P) - (AM_2P)$ en fonction de la géométrie du dispositif et d'une coordonnée cartésienne de P .
2. Application Numérique : On donne $a = 2,50 \text{ m}$. Calculer et commenter l'interfrange i .
3. Exprimer l'intensité lumineuse (ou éclairement) $I_A(P)$ observée au point P en fonction de λ_0, a, f', x et de I_{0A} qui désigne l'intensité totale issue de A et parvenant sur l'un des miroirs $\mathbf{M}_1$ ou $\mathbf{M}_2$.

On prend en compte maintenant la lumière provenant de l'étoile B , à la même longueur d'onde λ_0 mais décalée d'un angle θ . On note I_{0B} l'intensité totale issue de B . Sur la figure 4 ci-dessus on supposera $\theta > 0$.

1. Les sources A et B sont-elles cohérentes entre elles ?
2. Calculer $\delta_B = (BM_1P) - (BM_2P)$ en fonction de δ_A, θ et b .
3. Exprimer l'intensité lumineuse totale $I(P)$ en utilisant la formule géométrique affirmée en annexe pour l'exprimer sous la forme :

$$I(P) = K \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{x - x_0}{\Delta x} \right) V(\theta) \right]$$

dans laquelle on explicitera uniquement les constantes K et Δx ainsi que la fonction $V(\theta)$ en fonction des données du problème.

4. Quelles sont les significations physiques de x_0 et Δx ? Expliquez comment l'étude des franges permet de mesurer l'écartement angulaire des deux composantes d'une étoile double à l'instant de l'observation. Comment, à votre avis, peut-on ainsi distinguer un vrai système binaire d'une étoile double par alignement fortuit ?
5. Quelle valeur faut-il donner à la largeur commune ℓ des miroirs auxiliaires M'_1 et M'_2 pour pouvoir observer en tout au moins une dizaine de franges de part et d'autre de la frange centrale ?

II.B Spectrométrie interférentielle

II.B.1 La méthode de Michelson

L'appareil utilisé est constitué (voir la figure 5) d'une lame séparatrice S semi-réfléchissante et d'une lame dite compensatrice C , parallèle à la précédente, de même épaisseur et de même indice optique. Ces deux lames sont toutes deux parallèles au plan (Ouz) où l'axe (Ou) est la première bissectrice des axes (Oy) et (Ox) qui sont orthogonaux aux miroirs plans M_f (fixe) et M_m (mobile le long de (Ox) à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$).

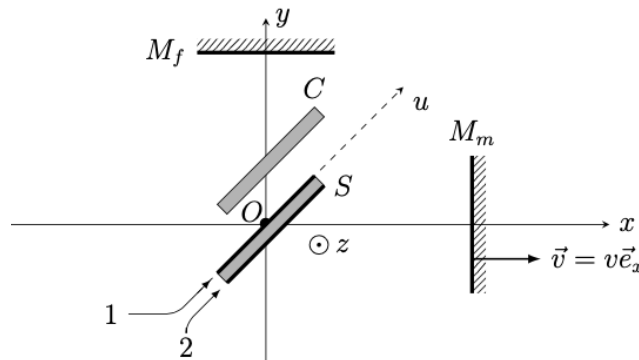


FIGURE 7 – L'interféromètre de Michelson

1. Expliquez, au moyen d'un schéma, le rôle de la lame (C) . Précisez en particulier, dans le cas de la figure 5, si la face réfléchissante de la lame (S) est la face supérieure (1) ou la face inférieure (2).
2. L'appareil est éclairé par une source de lumière étendue. Quelle est la nature des franges ? Où peut-on les observer ?
3. On utilise une source monochromatique de longueur d'onde λ_0 . On choisit l'instant $t = 0$ au moment du contact optique et on note I_0 l'intensité lumineuse totale en sortie de l'appareil sur l'axe (Oy) lorsqu'un des deux miroirs est obstrué. Exprimer, en fonction de I_0, λ_0, v et t , l'intensité $I(t)$ observée sur cet axe lorsque les deux miroirs sont éclairés.

En 1892, Michelson installe, au bureau international des poids et mesures (BIPM) de Sèvres, un interféromètre identique à celui décrit ci-dessus pour rechercher parmi les lampes spectrales connues (hydrogène, cadmium, etc.), celle qui présenterait la meilleure monochromaticité et établir ainsi un étalon de longueur optique.

II.B.2 La mesure de la structure fine de la raie rouge

On éclaire maintenant l'appareil décrit ci-dessus au moyen d'une source bichromatique émettant deux raies de longueurs d'onde voisines, de longueurs d'onde $\lambda_1 = \lambda_0$ et $\lambda_2 = \lambda_0 + \Delta\lambda$ et d'intensités I_1 et $I_2 < I_1$.

1. En admettant que $|\Delta\lambda| \ll \lambda_0$, montrer que l'expression du contraste des franges s'écrit de la manière suivante :

$$C(t) = \sqrt{1 - \frac{4I_1I_2}{(I_1 + I_2)^2} \sin^2 \left(2\pi vt \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right)}$$

puis calculer les contrastes maximal et minimal en fonction de I_2 et I_1 .

2. Réalisant la mesure du spectre de cette raie, Michelson a observé, en déplaçant le miroir mobile d'une longueur $\Delta x = 8,5 \text{ mm}$ depuis le contact optique, une diminution progressive du contraste qui atteint alors sa valeur minimale $C_{\min} \simeq 15\%$. En déduire I_2/I_1 puis la valeur de $\Delta\lambda/\lambda_0$ puis commenter l'ordre de grandeur obtenu au regard des développements mécaniques qui précèdent.

La structure fine ainsi observée n'a pu être expliquée qu'avec le développement ultérieur de la mécanique quantique pour le calcul du spectre détaillé des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène.

Données numériques

Année-lumière	$1 \text{ AL} = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{Hz}^{-1}$
Constante de la gravitation universelle	$\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Distance Terre-Soleil (unité astronomique)	$d = 1 \text{ UA} = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du Soleil	$M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Période du mouvement de la Terre (année)	$T_0 = 365,25 \text{ j} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
$\sqrt{2} \simeq 1,41, \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,71$	

Formulaire

Pour tous $a_1 > 0, a_2 > 0, \theta_1 \in \mathbb{R}$ et $\theta_2 \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2 = a \cos \left[\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \varphi \right]$$

avec respectivement :

$$a = (a_1 + a_2) \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}} \text{ et } m = \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{a_1 + a_2}$$

tandis que $\varphi \in \mathbb{R}$ est donné par :

$$\tan \varphi = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \tan \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$$

Partie V - Le refroidissement en thermodynamique

Au travers de trois sous-parties indépendantes, on s'intéresse à divers procédés de refroidissement. On rappelle, pour un gaz diatomique, les expressions des capacités thermiques molaires respectivement à volume et pression constante :

$$C_{v,m} = \frac{5}{2}R \quad C_{p,m} = \frac{7}{2}R$$

avec $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

A - Détente d'un gaz dans l'atmosphère

Une mole de dioxygène, considéré comme un gaz parfait diatomique, se trouve à la pression $P = 2,0$ bar et à la température $T = 280$ K. On lui fait subir une brusque détente dans l'atmosphère de pression supposée constante $P_0 = 1,0$ bar.

1. Par quel(s) qualificatif(s), parmi les suivants, peut-on qualifier la transformation que subit la mole de dioxygène ? On justifiera sa réponse.
 - réversible ;
 - irréversible ;
 - isotherme ;
 - adiabatique ;
 - isobare ;
 - isochore.
2. Par application du premier principe de la thermodynamique, déterminer la valeur de la température T' atteinte par le gaz à la fin de la détente. On remarquera que $P = 2P_0$.
3. Exprimer la variation d'entropie du gaz lors de cette transformation.

B - Climatisation d'un local

Un cycle de Brayton inversé réaliser un effet frigorifique. Lors de ce cycle, un gaz est comprimé, refroidi puis détendu. La température de fin de détente étant basse, ce gaz peut être utilisé pour refroidir une enceinte, soit par contact direct (notamment s'il s'agit d'air), soit par l'intermédiaire d'un échangeur.

Ce type de dispositif a été jusqu'à récemment très utilisé dans les avions pour assurer la climatisation des cabines en vol. Il est également utilisé pour climatiser les très grosses installations qui nécessitent de grandes quantités de fluide caloporteur.

Un cycle de Brayton inversé est formé de deux adiabatiques et de deux isobares. Il est supposé réversible et décrit par de l'air (assimilé à un gaz parfait diatomique). Dans cet exercice on considérera une mole d'air parcourant le cycle. On appelle γ le rapport des capacités thermiques à pression et volume constants.

- $1 \rightarrow 2$: compression adiabatique réversible faisant passer le gaz de la pression P_1 à la pression P_2 ;
 - $2 \rightarrow 3$: compression isobare ;
 - $3 \rightarrow 4$: détente adiabatique réversible redonnant la pression P_1 au gaz ;
 - $4 \rightarrow 1$: retour isobare au point 1.
4. Tracer dans un diagramme de Clapeyron (P,V) le cycle de Brayton inversé. Justifier le fait qu'il soit adapté pour décrire un climatiseur.
 5. Justifier sans calcul lourd le fait que la transformation $2 \rightarrow 3$ s'accompagne d'un refroidissement.

6. Pour les quatre transformations du gaz envisagées, exprimer le transfert thermique associé en fonction de R et des température T_i avec $i \in 1, 2, 3, 4$ nécessaires.
7. Soit η l'efficacité du climatiseur. Définir η puis l'exprimer en fonction des transferts thermiques des différentes transformations du cycle.
8. On pose $a = \frac{P_2}{P_1}$, appelé rapport de compression du cycle. Exprimer de nouveau η uniquement en fonction de a et de γ .