

Devoir surveillé n° 4

7 décembre 2024

durée 4h

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale à l'enseignant se trouvant dans la salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce sujet est composé de deux parties qui doivent chacune être traitée : chimie et physique. Vous disposez de 1h00 pour la chimie et 3h00 pour la physique, la copie de chimie est à remettre au surveillant après le temps imparti.

Tout nouvel exercice est à commencer sur une nouvelle copie double.

Partie Chimie

I-Obtention d'un ciment

Données :

1bar = 10^5 PaConstante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Numéros atomiques : C : Z = 6 ; O : Z = 8 ; Ca : Z = 20.

Masses molaires en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$: CaCO_3 : 100 ; CH_4 : 16

Enthalpies standard de formation à 298 K :

Espèce	$\text{CaCO}_{3(s)}$	$\text{SO}_{2(s)}$	$\text{Ca}_3\text{SiO}_{5(s)}$	$\text{CO}_{2(g)}$
$\Delta_f H^\circ (\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$	-1206	-910	-2930	-393

Capacité thermique molaire standard à pression constante :

Espèce	$\text{CH}_{4(g)}$	$\text{O}_{2(g)}$	$\text{N}_{2(g)}$	$\text{CO}_{2(g)}$	$\text{H}_2\text{O}_{(g)}$
$C_{p,m}^\circ (\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})$	35,3	29,4	29,1	37,1	33,6

Toutes les applications numériques seront effectuées avec deux chiffres significatifs sauf mention contraire.

1- Elaboration à partir du calcaire

Le ciment Protland (catégorie la plus utilisée) est élaboré par réaction, dans un four chauffé à 1700 K, d'un mélange de calcaire (CaCO_3) et d'argile (constitué de SiO_2 et Al_2O_3).

Le constituant principal de ce ciment non hydraté est le silicate de calcium Ca_3SiO_5 formé selon la réaction totale (1) :



Le carbonate de calcium utilisé dans la synthèse des ciments est un composé ionique constitué du cation calcium Ca^+ et de l'anion carbonate CO_3^{2-} .

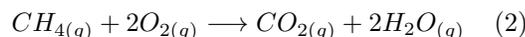
- 1- Écrire la configuration électronique du calcium.
- 2- Dans la classification périodique, l'élément strontium, Sr , est situé dans la même colonne et juste en dessous du calcium, Ca . En déduire la configuration électronique et le numéro atomique du strontium Sr .
- 3- Donner la représentation de Lewis de l'ion carbonate sachant que l'atome de carbone est au centre de l'édifice.
- 4- Calculer l'enthalpie standard de réaction $\Delta_r H_1^\circ$ de la réaction (1) à 298 K. Qualifier thermiquement cette réaction.
- 5- En quoi consiste l'approximation d'Ellingham ?

On se place dans la suite dans le cadre de cette approximation.

On souhaite évaluer le transfert thermique Q_P à fournir pour transformer une tonne de $CaCO_{3(s)}$ selon la réaction (1) effectuée à 1700 K sous la pression $P^\circ = 1 \text{ bar}$.

- 6- Écrire la relation entre Q_P et $\Delta_r H_1^\circ$. Faire l'application numérique.

L'énergie précédente peut être apportée par la réaction totale (2) de combustion du méthane.



L'enthalpie standard de réaction vaut $\Delta_r H_2^\circ = -820 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ à 298 K.

- 7- On étudie la combustion sous P° , d'une mole de $CH_{4(g)}$ avec la quantité stoechiométrique d'air, initialement à 298 K. Réaliser un bilan de matière en fin de réaction. Faire l'application numérique des quantités de matière en fin de réaction.

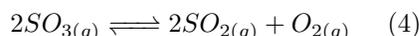
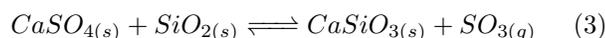
- 8- Considérant que la combustion est faite dans une enceinte calorifugée, calculer la température T_F finale atteinte par ces constituants en fin de réaction de combustion.

- 9- On veut utiliser pour effectuer la réaction (1) la quantité de chaleur fournie à pression constante par le retour à 1700 K des constituants obtenus à l'issue de la réaction (2). Quelle masse de méthane $CH_{4(g)}$ faut-il brûler par la réaction (2) pour transformer une tonne de $CaCO_{3(s)}$ selon la réaction (1) ?

2- Élaboration à partir du gypse.

Nous étudions dans cette partie la décomposition thermique du gypse (sulfate de calcium $CaSO_{4(s)}$) en présence de sable (constitué de silice $SiO_{2(s)}$) conduisant au silicate de calcium $CaSiO_{3(s)}$. Le ciment Portland peut être obtenu aussi par cette voie en chauffant le mélange précédent en présence de charbon et d'argile.

Ce procédé met en jeu les deux équilibres simultanés (3) et (4) :



A $T = 1400 \text{ K}$ les constantes des équilibres (3) et (4) sont respectivement $K_3 = 0,95$ et $K_4 = 400$.

- 10- Donner la loi d'action des masses.

- 11- Partant uniquement des réactifs $CaSO_4$ et SiO_2 , exprimer les quotients de réaction à l'équilibre $Q_{r,eq,3}$ et $Q_{r,eq,4}$ en fonction des seules pressions partielles P_{SO_3} et P_{O_2} et P° .

12- En déduire les expressions de P_{SO_3} , P_{O_2} et P_{SiO_2} à l'équilibre à 1400 K. L'application numérique conduit à $P_{O_2} = 4,48$ bar. Donner les valeurs numériques de P_{SO_3} et P_{SiO_2} en tenant compte des chiffres significatifs.

Dans un récipient de volume fixé $V = 10$ L, initialement vide, on introduit 1 mol de $CaSO_{4(s)}$ et 1 mol de $SiO_{2(s)}$ à la température $T = 1400$ K maintenue constante. On constate que les solides $CaSiO_4$ et SiO_2 sont présents à l'équilibre.

Aide aux calculs :

$$\frac{9,91}{8,314 \times 14} = 8,514 \cdot 10^{-2} \quad \frac{8,314 \times 14}{9,91} = 11,745$$

13- Calculer à l'équilibre les avancements respectifs ξ_3 et ξ_4 des réactions (3) et (4) et en déduire le nombre de moles de $CaSO_4$ et de SiO_2 présents à l'équilibre.

14- Quel est l'effet d'un ajout de $CaSO_4$ sur l'équilibre du système?

On augmente le volume du récipient à température constante.

15- À partir de quelle valeur du volume observera-t-on la décomposition totale de 1 mol de $CaSO_4$ et 1 mol de SiO_2 à 1400 K.

À 1400 K le gypse peut aussi se décomposer en oxyde de calcium selon la réaction (5) de constante d'équilibre $K_5 = 7 \cdot 10^{-6}$:



16- Exprimer $\Delta_r G_5$ de la réaction (5). De quel signe est $\Delta_r G_5$ dans les conditions de la question 13? $CaO_{(s)}$ se forme-t-il? Justifier votre réponse.

Partie Physique

I- Il y a de l'orage dans l'air



FIGURE 1 – Photographie d'un cumulonimbus, avec apparition d'un éclair entre le sol et la base du nuage.

Le processus de formation des nuages dans l'atmosphère suit un ensemble complexe d'étapes dont la connaissance est à la base de la météorologie. Le cumulonimbus est le stade ultime du nuage formé dans un courant d'air chaud ascendant en contact avec un air froid et sec. Son profil en forme d'enclume, dont le sommet atteint le haut de la troposphère, et sa taille colossale sont caractéristiques... et annonceurs d'un orage imminent. On se propose de modéliser la répartition des charges électriques dans le nuage et de comprendre l'apparition de la foudre. On constate généralement l'apparition de charges négatives à la base du nuage et de charges positives au sommet. Dans certains cas, il peut même exister plusieurs zones chargées négativement ou positivement alternativement. La base chargée du nuage fait alors apparaître, par influence et ionisation de l'air, des charges positives dans l'atmosphère au voisinage du sol. Des mesures effectuées par ballon-sonde permettent de déterminer la valeur de la composante verticale du champ électrique dans l'atmosphère : environ $65 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ à 500 m d'altitude et jusqu'à $200 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ de valeur maximale à l'intérieur du nuage.

On considère un nuage situé entre les altitudes $h_1 = 2 \text{ km}$ et $h_2 = 10 \text{ km}$ (hauteur de la troposphère), de hauteur $H = h_2 - h_1 = 8 \text{ km}$ et de section horizontale $S = 1 \text{ km}^2$. Au niveau du sol, les charges positives se répartissent sur une épaisseur $h = 500 \text{ m}$. On rappelle la permittivité diélectrique du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

Dans la modélisation proposée, on néglige tout effet de bord et on suppose donc que les grandeurs étudiées ne dépendent que de l'altitude z , comme indiqué sur le schéma ci-après.

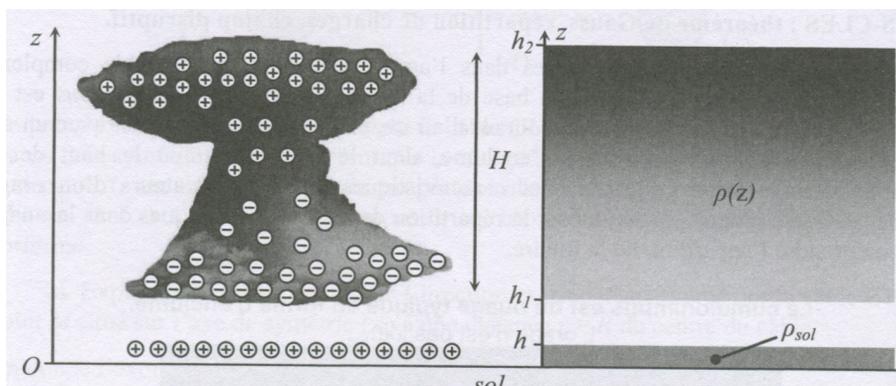


FIGURE 2 – Schéma de la répartition des charges dans un cumulonimbus et au sol (à gauche). Modèle utilisé ici avec les densités volumique ρ_{sol} et $\rho(z)$ (à droite).

Les charges positives près du sol sont réparties avec la densité volumique de charge uniforme ρ_{sol} . Le champ électrique est supposé nul en $z = 0$. À l'intérieur du nuage, on considère simplement que la densité volumique de charge $\rho(z)$ varie linéairement, de la valeur maximale $\rho_0 > 0$ en $z = h_2$ à la valeur opposée $-\rho_0$ en $z = h_1$.

1. Montrer qu'en tout point M de l'espace, le champ électrique peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E}(M) = E_z(z)\vec{e}_z$$

2. En utilisant le théorème de Gauss et une surface bien choisie (que vous définirez soigneusement), déterminer le champ électrique $E_z(z)$ dans la zone chargée $0 < z < h$ au niveau du sol. En déduire la valeur numérique de la densité volumique de charge ρ_{sol} , ainsi que la charge totale Q_{sol} existant dans cette zone.

Aide au calcul : $\frac{8,85 \times 6,5}{5} = 11,5.$

3. Montrer que le champ électrique dans la zone $h < z < h_1$ est uniforme et donner sa valeur.

4. Établir l'expression de la densité volumique de charge $\rho(z)$ à l'intérieur du nuage.

5. Montrer que l'équation locale de Maxwell-Gauss permet d'obtenir le champ électrique dans le nuage à une constante près. Justifier la valeur de cette constante. Donner alors l'expression de $E(z)$ en fonction des données du problème.

6. Représenter l'allure de $E_z(z)$ en fonction de l'altitude z . On montrera que $E_z(z)$ possède un minimum en $z = z_0$ dont on précisera l'expression. Donner la valeur de E_{min} .

7. Déterminer la valeur numérique de ρ_0 . Commenter.

Aide au calcul : $\frac{265 \times 8,85}{2} = 1173.$

8. Exprimer le potentiel électrostatique $V(z)$ entre le sol et le nuage. On prendra $V = 0$ en $z = 0$. En déduire la valeur de la différence de potentiel entre le sol et la base du nuage.

Aide au calcul : $\frac{1,15 \times 5}{2 \times 8,85} \times 3,5 = 1,14.$

La foudre est une décharge électrique entre le nuage et le sol (parfois même entre deux nuages) permettant de neutraliser les charges accumulées. Lorsque le champ électrique atteint localement la valeur de $10 \text{ kV} \cdot \text{cm}^{-1}$ (pour l'air humide) - appelé champ disruptif - l'air est ionisé et un courant électrique devient possible dans l'air devenu conducteur : la décharge est à craindre...

9. Comparer la valeur du champ électrique présent dans le nuage et la valeur du champ disruptif dans l'air humide. Commenter.

On constate que la foudre tombe préférentiellement sur des objets pointus, comme les arbres, les clochers et les paratonnerres. Pour illustrer *cet effet de pointe*, on propose la modélisation suivante : un objet pointu situé à l'altitude z est modélisé par une petite sphère de rayon R , de charge q et portée au potentiel $V(z)$. On ne considère ici que l'action de la sphère sur son environnement immédiat. Soit un point M situé à la distance $r > R$ du centre O de la sphère.

10. Rappeler l'expression du champ électrique \vec{E} et du potentiel électrostatique créés en M par la sphère chargée. En déduire la relation entre la norme E du champ électrique créé au voisinage immédiat de la sphère et le potentiel $V(z)$ de celle-ci.

11. En supposant deux objets pointus assimilés à des boules de rayon R_1 et R_2 tels que $R_2 < R_1$ portés au potentiel $V(z)$, déterminer la relation entre les normes E_1 et E_2 des champs électriques créés au voisinage immédiat de chaque objet. Commenter.

12. Pourquoi dit-on qu'en l'absence d'obstacle, il vaut mieux s'allonger par terre et attendre que l'orage passe, plutôt que de rester debout ? A quelle altitude l'air pourrait-il être ionisé au bout des doigts ? Il apparaît alors un courant ionique et des effluves lumineux dus à la recombinaison des ions. Cet effet est connu sous le nom d'effet couronne.

$$\text{Aide au calcul : } \sqrt{\frac{2 \times 8,85 \times 5}{1,15}} = 8,8.$$

II- Étude d'un modèle gravimétrique de la Terre

II-1 Préliminaire : l'analogie électrostatique - gravitation

1. En utilisant l'analogie entre le champ électrostatique et le champ gravitationnel, montrer que ce dernier, noté $\vec{\mathcal{G}}$, vérifie l'équation locale $\text{div}(\vec{\mathcal{G}}) = -4\pi G\mu$ avec G la constante universelle de gravitation, et μ la masse volumique locale. En déduire l'énoncé du théorème de Gauss de la gravitation.

II-2 Un premier modèle gravimétrique fruste de la Terre

Dans ce premier modèle, on assimile la Terre à une boule T_h de centre O , de rayon R_T et de masse M_T uniformément répartie en volume. Celle-ci est à l'origine d'un champ gravitationnel noté $\vec{\mathcal{G}}_{T_h}$. On note μ_0 la masse volumique moyenne de la Terre (qui s'identifie ici à la masse volumique de chacun de ses points).

2. Déterminer le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}_{T_h}$ en tout point de l'espace en introduisant un système de coordonnées adapté.

3. Tracer sa norme en fonction de la distance r au centre O . Préciser la valeur du champ gravitationnel à la surface de la Terre.

II-3 Un second modèle gravimétrique (noyau + manteau) de la Terre

Le modèle précédent est fruste puisqu'il ne tient pas assez compte de la structure interne de la Terre. On rencontre dans la littérature un second modèle, où la Terre est toujours assimilée à une boule de centre O et de rayon R_T avec une répartition de masse à symétrie sphérique de centre O ; mais cette répartition est cette fois-ci inhomogène de sorte que la norme \mathcal{G}_T du champ gravitationnel interne en fonction de la distance r au centre O présente l'allure précisée à la figure 1.

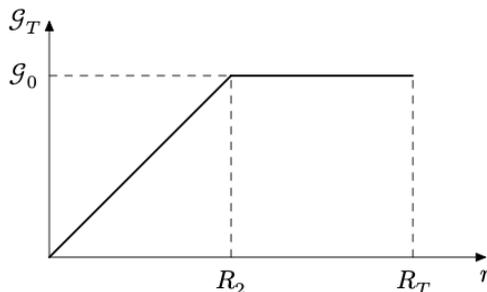


Figure 1 : Champ de gravitation terrestre à l'intérieur de la Terre pour un modèle (noyau + manteau)

On distingue deux parties dans ce modèle (noyau + manteau) : la discontinuité de Gutenberg correspond à la distance $r = R_2 = 3486$ km.

On note toujours μ_0 la masse volumique moyenne de la Terre.

4. Justifier que la valeur de \mathcal{G}_0 à la surface de la Terre dans le cadre de ce modèle est inchangée par rapport à celle évaluée à la question 3.

5. Déterminer la distribution de masse volumique $\mu(r)$ pour la Terre dans ce modèle. L'exprimer en fonction de R_T , R_2 et μ_0 dans le noyau et en fonction de R_T , M_T et r dans le manteau sachant que

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\varphi)}{\partial \varphi}$$

6. Tracer l'allure de cette distribution de masse volumique $\mu(r)$ en précisant les expressions littérales remarquables. Discuter de ce modèle par rapport à celui obtenu par le modèle *PREM* précisé sur la figure suivante.

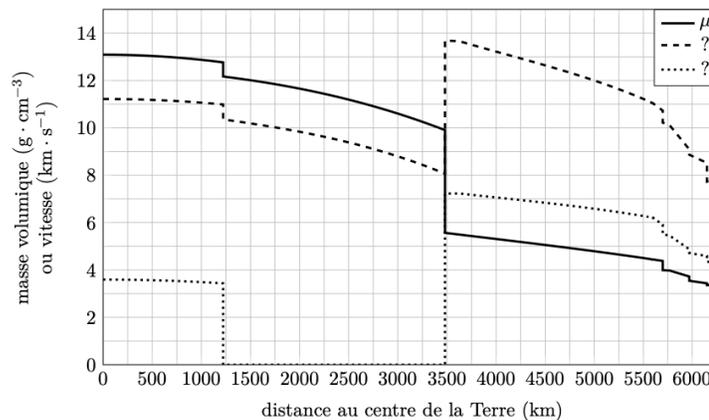


Figure 2 : Profils de la masse volumique et des vitesses des ondes P et S dans le modèle PREM.

D'après Dziewonski A. M., Anderson D. L., 1981. *Preliminary reference Earth model. Physics of the Earth and Planetary Interiors. Vol. 25, n° 4, p. 297-356.*

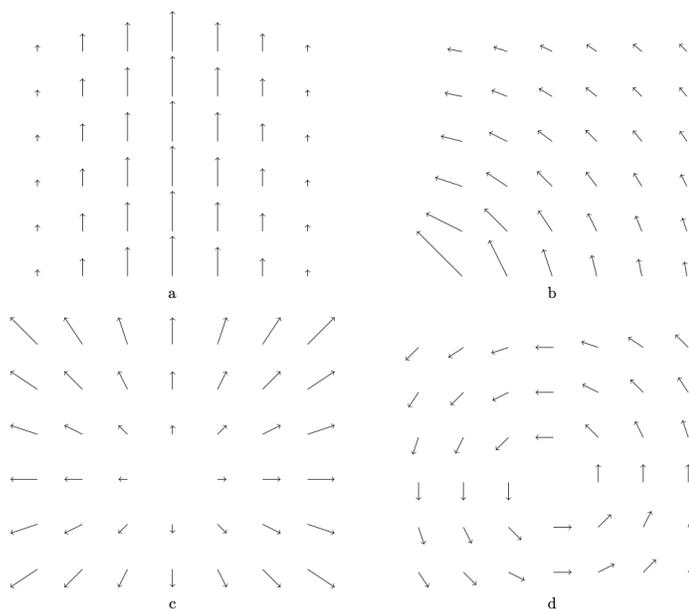
Remarque : L'analyse de temps de parcours des ondes P et S, enregistrées en différents points du globe après de grands séismes, a permis de calibrer un modèle radial de la Terre dit modèle PREM (Preliminary Reference Earth Model). Il permet notamment de préciser, en fonction de la distance au centre de la Terre, les vitesses v_P et v_S et la masse volumique μ .

III - Généralités sur le champ magnétique

III-1 Les propriétés du champ magnétique

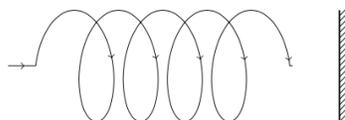
1. Le champ magnétique est dit à flux conservatif. Traduire cette propriété par une équation locale, puis sous forme intégrale. Interpréter concrètement cette propriété.

La figure suivante donne quatre cartes de champ qui représentent une coupe dans un plan perpendiculaire à l'axe Oz d'un champ de vecteur \vec{A} , invariant par translation suivant l'axe Oz . Parmi les cartes de champ proposées ci-dessous, lesquelles sont vraisemblablement celle d'un champ à flux conservatif?

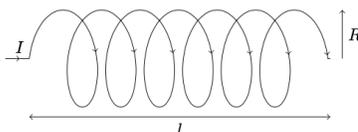


On rappelle que $\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ en coordonnées cylindriques.

2. Dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaire (ARQS), donner l'équation de Maxwell-Ampère puis énoncer le théorème d'Ampère. Parmi les cartes de champs proposées, lesquelles sont celles d'un champ à rotationnel nul? Lesquelles pourraient être celles d'un champ magnétique?
3. Définir très brièvement les notions de plan de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de courant et les propriétés du champ magnétique qui en résulte.
4. On s'intéresse à l'image dans un miroir d'un solénoïde. Indiquer en la justifiant, la direction et le sens du champ magnétique dans le solénoïde image par rapport à celui du solénoïde initial.



On s'intéresse à un solénoïde de longueur l et de rayon R comportant N spires.

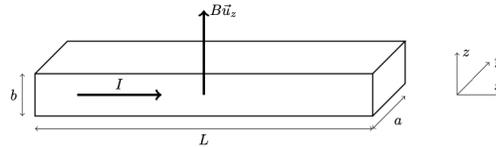


5. À quelle condition peut-on dire que ce solénoïde est infiniment long? On admettra dans la suite que cette condition est réalisée.
6. Identifier les propriétés de symétrie et d'invariance du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde. En déduire la direction du champ et les variables dont il dépend.
7. Montrer que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde, et ensuite déterminer son expression.

8. Calculer $\|\vec{B}\|$ pour : $N = 1000$ spires, $l = 1,00$ m, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H. m⁻¹, $I = 1,00$ A. Commenter. Comment faire pour obtenir un champ magnétique plus intense ?

III-2 Effet Hall

Une plaquette parallélépipédique de grande longueur L , suivant Ox , de largeur a , d'épaisseur b , est parcourue par un courant d'intensité I répartie uniformément sur toute sa section droite.



Aide aux calculs :

$$\frac{64}{8,92 \times 6,02 \times 1,6} = 0,7449 \quad 1,7 \times 1,6 \times 126,7 = 344,6$$

9. Quelle est l'action du champ magnétique sur un porteur de charge $q < 0$? Que se passe-t-il pendant le régime transitoire ?

Montrer qu'il apparait alors une différence de potentiel entre les points A et C se situant sur les faces latérales parallèles au plan Oxz et tels que $\vec{AC} = a\vec{e}_y$. La différence de potentiel $V_A - V_C$ est nommée V_H . Quel est son signe ? Dépend-il de celui de q ?

10. On se place ensuite en régime permanent. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un porteur de charge, exprimer le champ de Hall \vec{E}_H .

11. Donner la relation liant le vecteur densité de courant volumique \vec{j}_H à la vitesse de déplacement des charges dans la plaquette et à n (nombre de porteurs de charge par unité de volume) et q . Montrer que $V_H \cdot b = R_H \cdot I \cdot B$ où R_H est la constante de Hall que l'on explicitera en fonction de n et q . Que peut-on dire du signe de R_H ?

12. Le matériau est un ruban conducteur de masse volumique ρ , de masse molaire M . Chaque atome met en jeu un électron libre pour la conduction.

Donner l'expression de n puis celle de V_H en fonction de $\rho, M, q, I, b, \mathcal{N}_a$ et B . Faire l'application numérique pour $B = 0,1$ T, $M = 64$ g. mol⁻¹, $\rho = 8,92$ g. cm⁻³, $I = 1,00$ A, $\mathcal{N}_a = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹, $b = 0,1$ mm et $q = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C. Commenter.

13. Les valeurs choisies pour I et B sont-elles réalistes ? Le signe des porteurs de charge, s'il est inconnu, peut-il être déterminé dans cette expérience ? Comment ?

14. Les matériaux semi-conducteurs permettent d'obtenir des tensions de Hall plus élevées. On donne pour $I = 100$ mA, $|V_H| = 126,7$ mV, $n = 1,7 \cdot 10^{22}$ m⁻³, $b = 0,1$ mm, $a = 1$ cm et $L = 3$ cm et $q = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C. Calculer la valeur du champ \vec{B} . Commenter.

IV - Confinement d'un électron

Ce problème porte sur l'étude sommaire du confinement d'un électron de masse m et de charge $-q$ dans une petite région de l'espace. On se place dans le cadre de la mécanique newtonienne et on néglige toutes les forces autres que les forces électromagnétiques. Le référentiel galiléen d'étude est $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ dont les vecteurs de base sont $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Suivant les questions on repérera un point M par ses coordonnées cartésienne (x, y, z) ou cylindrique (r, θ, z) avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Données :

charge élémentaire : $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C ;
 vitesse de la lumière dans le vide $c = 3 \cdot 10^8$ m.s⁻¹ ;
 masse de l'électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg ;
 perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H m⁻¹.

IV-1 Mouvement de l'électron dans un champ magnétique uniforme

Dans le vide, l'électron est soumis à l'action d'un champ magnétique \vec{B} uniforme et permanent. Le champ \vec{B} est colinéaire à Oz : $\vec{B} = B\vec{e}_z$ et $B > 0$. On pose $\omega_c = \frac{qB}{m}$.

À $t = 0$, l'électron est à l'origine du repère et animé d'une vitesse $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0z}\vec{e}_z$ avec $v_{0x} > 0$ et $v_{0z} > 0$.

1- Déterminer la coordonnée $z(t)$ pour tout $t > 0$.

On étudie la projection du mouvement de l'électron dans le plan Oxy .

2- Montrer que les composantes v_x et v_y de la vitesse de l'électron vérifient le système :

$$\begin{cases} \ddot{v}_x + \omega_c^2 v_x = 0 \\ \ddot{v}_y + \omega_c^2 v_y = 0 \end{cases}$$

En déduire les composantes v_x et v_y de la vitesse de l'électron en fonction de ω_c , v_{0x} et du temps t .

3- En déduire les composantes $x(t)$ et $y(t)$ de l'électron à la date t puis montrer que la projection de la trajectoire de l'électron dans le plan Oxy est un cercle Γ de centre H et de rayon r_H . Déterminer les coordonnées x_H et y_H de H , le rayon r_H et la fréquence de révolution f_c de l'électron sur ce cercle. Tracer avec soin le cercle Γ , préciser le sens de parcours.

4- Donner un ordre de grandeur de f_c pour $B = 1,0$ T.

5- Décrire la trajectoire de l'électron dans l'espace. L'électron est-il confiné au voisinage de O ?

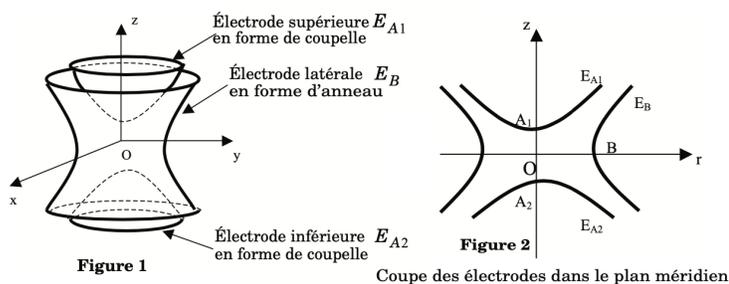
IV-2 Mouvement de l'électron dans un champ électrique quadrupolaire

À l'aide d'électrodes de forme appropriée on crée autour du point O , dans une zone vide de charges, un champ électrostatique \vec{E} quadrupolaire de révolution autour de l'axe Oz , dérivant du potentiel :

$$U(x, y, z) = \alpha_0 + \alpha_1(x^2 + y^2) + \alpha_2 z^2$$

où $\{\alpha_i\}_{i \in [0,1,2]}$ sont des constantes.

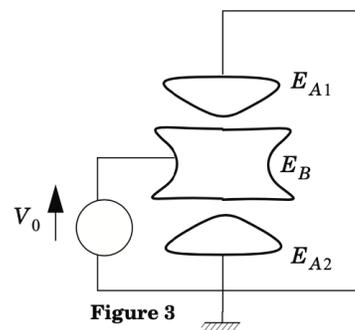
On peut aussi mettre U sous la forme $U(r, z) = \alpha_0 + \alpha_1 r^2 + \alpha_2 z^2$



6- À quelle équation aux dérivées partielles doit satisfaire le potentiel U ?
En déduire une relation entre α_2 et α_1 .

Les surfaces internes des 2 électrodes E_{A1} et E_{A2} , de révolution autour de Oz , ont pour équation : $r^2 - 2z^2 = -2z_0^2$ (les points A_1 et A_2 de la figure 2 ont respectivement pour ordonnées $+z_0$ et $-z_0$ sur l'axe Oz). Ces deux électrodes sont au potentiel nul. La surface interne de l'électrode latérale E_B également de révolution autour de Oz , a pour équation : $r^2 - 2z^2 = r_0^2$ (le point B de la figure 2 est à la distance r_0 de l'axe Oz). Cette électrode est au potentiel V_0 ($V_0 > 0$).

On définit la constante positive d par $4d^2 = r_0^2 + 2z_0^2$.



7- Exprimer le potentiel $U(r, z)$ en fonction de d , z_0 , V_0 , r et z .

8- Représenter, au voisinage du point O , dans le plan méridien rOz , les lignes équipotentielles (préciser en particulier les lignes équipotentielles qui passent par O) et les lignes de champ en justifiant brièvement le schéma. Préciser également le sens du champ \vec{E} sur les lignes de champ.

9- Représenter, au voisinage du point O , dans le plan Oxy , les lignes équipotentielles et les lignes de champ, en précisant le sens de \vec{E} sur les lignes de champ.

10- Calculer les composantes cartésiennes E_x , E_y et E_z du champ \vec{E} en un point M en fonction de d , V_0 , x , y et z .

11- Écrire les trois équations différentielles du mouvement en projection sur les axes Ox , Oy et Oz . On introduira la constante $\omega_0 = \sqrt{\frac{qV_0}{md^2}}$.

12- Montrer que le mouvement de l'électron suivant Oz (mouvement longitudinal) est périodique et déterminer sa fréquence f_0 en fonction de ω_0 .

Pour $r_0 = 3 \text{ mm}$, $z_0 = 2 \text{ mm}$, $V_0 = 10 \text{ V}$, on trouve $f_0 \approx 10^8 \text{ Hz}$.

13- En supposant qu'à $t = 0$, l'électron est à l'origine de repère et animé d'une vitesse $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0z}\vec{e}_z$ avec $v_{0x} > 0$ et $v_{0z} > 0$, montrer que le mouvement de l'électron dans le plan Oxy (mouvement transversal) n'est pas borné eu qu'il n'y a donc pas confinement de l'électron au voisinage de O dans le champ quadrupolaire.