

**Devoir surveillé n° 5**

25 janvier 2025

durée 4h

*L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé*

**La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.**

*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale à l'enseignant se trouvant dans la salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

Ce sujet est composé de deux parties qui doivent chacune être traitée : chimie et physique.

**Vous disposez de 1h00 pour la chimie et 3h00 pour la physique.**

La copie de chimie sera à rendre en fin d'épreuve.

Tout nouvel exercice est à commencer sur une nouvelle copie double.

## Chimie : Étude du cuivre et de ses minerais

Le cuivre est un élément présent dans des minerais complexes. Il faut donc le séparer d'autres métaux présents dans ce même minerai. Dans le problème suivant, on étudie les bases des traitements effectués dans ce but, sur certains minerais cuprifères. On travaille à  $T = 298 \text{ K}$ .

### A. Séparation du cuivre et du cobalt

Il s'agit de traiter une solution de sulfate de cuivre et de cobalt. On procède par précipitation sélective des hydroxydes métalliques.

On considère un cation métallique  $M^{2+}$  dont l'hydroxyde  $M(OH)_2$  est insoluble, de constante de solubilité :  $K_s$ .

1. Exprimer la solubilité  $s$  de l'hydroxyde en fonction de  $[H_3O^+]$  et  $ps$  en fonction du  $pH$ .
2. Donner l'expression numérique de  $ps = f(pH)$  dans le cas de l'hydroxyde de cuivre ( $pK_{s1} = 18,8$ ) et dans le cas de l'hydroxyde de cobalt ( $pK_{s2} = 14,8$ ).
3. Montrer qu'il existe une zone de  $pH$  dans laquelle il est possible de précipiter 99,9 % du cuivre, sans précipiter plus de 0,1 % du cobalt, à partir d'une solution initiale à  $1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$  en  $Cu^{2+}$ , et  $1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$  en  $Co^{2+}$ .

### B. Minerais complexes

Une opération pyrométallurgique effectuée sur le minerai conduit à un mélange solide contenant du cuivre, du cobalt et du manganèse : la connaissance des diagrammes potentiel-pH correspondant à ces éléments permet d'étudier son traitement.

#### B.1 Diagramme simplifié du cuivre

4. Tracer, sur la feuille annexe fournie, le diagramme  $E = f(pH)$  simplifié du cuivre. On indiquera les équations des segments de droites.

**Hypothèses, et données thermodynamiques :**

On ne considère pas le degré (+ I) d'oxydation du cuivre, mais seulement les degrés 0 et (+ II).

$E^\circ(Cu^{2+}/Cu_{(s)}) = + 0,34 \text{ V}$  ;  $pK_{s1} = 18,8$  ;

Concentration des espèces solubles :  $C_0 = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ .

5. Placer, sur le diagramme, les domaines de prédominance des différentes espèces chimiques contenant du cuivre.

**B.2 Traitement du mélange**

On dispose des réactifs suivants :

- Acide sulfurique à  $0,5 \text{ mol.L}^{-1}$ .
- Hypochlorite de sodium ( $\text{Na}^+, \text{ClO}^-$ ), en solution concentrée.  $pK_a(\text{HClO}/\text{ClO}^-) = 7,5$ .
- Carbonate de sodium ( $2\text{Na}^+, \text{CO}_3^{2-}$ ), solide, soluble dans l'eau.  
 $pK_{a1}(\text{H}_2\text{CO}_3/\text{HCO}_3^-) = 6,4$ ;  $pK_{a2}(\text{HCO}_3^-/\text{CO}_3^{2-}) = 10,3$ .

On souhaite proposer un procédé permettant d'obtenir, à partir du mélange solide cuivre-cobalt-manganèse, les trois métaux séparés, au moyen d'opérations chimiques suffisamment simples pour pouvoir être mises en oeuvre industriellement.

**Remarque :** On admet, pour simplifier, que l'acide sulfurique est un diacide fort.

6. Déterminer l'équation de la frontière  $\text{H}^+/\text{H}_{2(\text{g})}$  en supposant que  $P(\text{H}_2) = 1 \text{ bar}$ . Représenter, sur le diagramme  $E = f(\text{pH})$ , la droite correspondante. En déduire qu'un des métaux du mélange n'est pas attaqué par l'acide sulfurique. Ce métal est récupéré par filtration. La solution résiduelle est traitée comme indiqué à la question 9.
7. Tracer, sur l'annexe, les frontières séparant les différents domaines mettant en jeu l'élément chlore, pour un  $\text{pH} > 2$  : pour ces valeurs de  $\text{pH}$ , on admet que le dichlore se dismute. On rappelle que sur la frontière la convention choisie consiste à considérer l'équipartition en concentration des espèces dissoutes. Indiquer les espèces chimiques stables dans les différents domaines.

**Données thermodynamiques :**

$$E_1^\circ(\text{HClO}/\text{Cl}^-) = + 1,50 \text{ V}; E_2^\circ(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) = + 1,73 \text{ V}.$$

8. Qu'est-ce qu'une réaction de dismutation ? Donner le bilan de la réaction de dismutation du dichlore, en milieu très acide, puis en milieu très basique en considérant un nombre stoechiométrique unitaire pour le dichlore. Calculer, dans ces deux cas, la constante de la réaction de dismutation. Conclusion ?

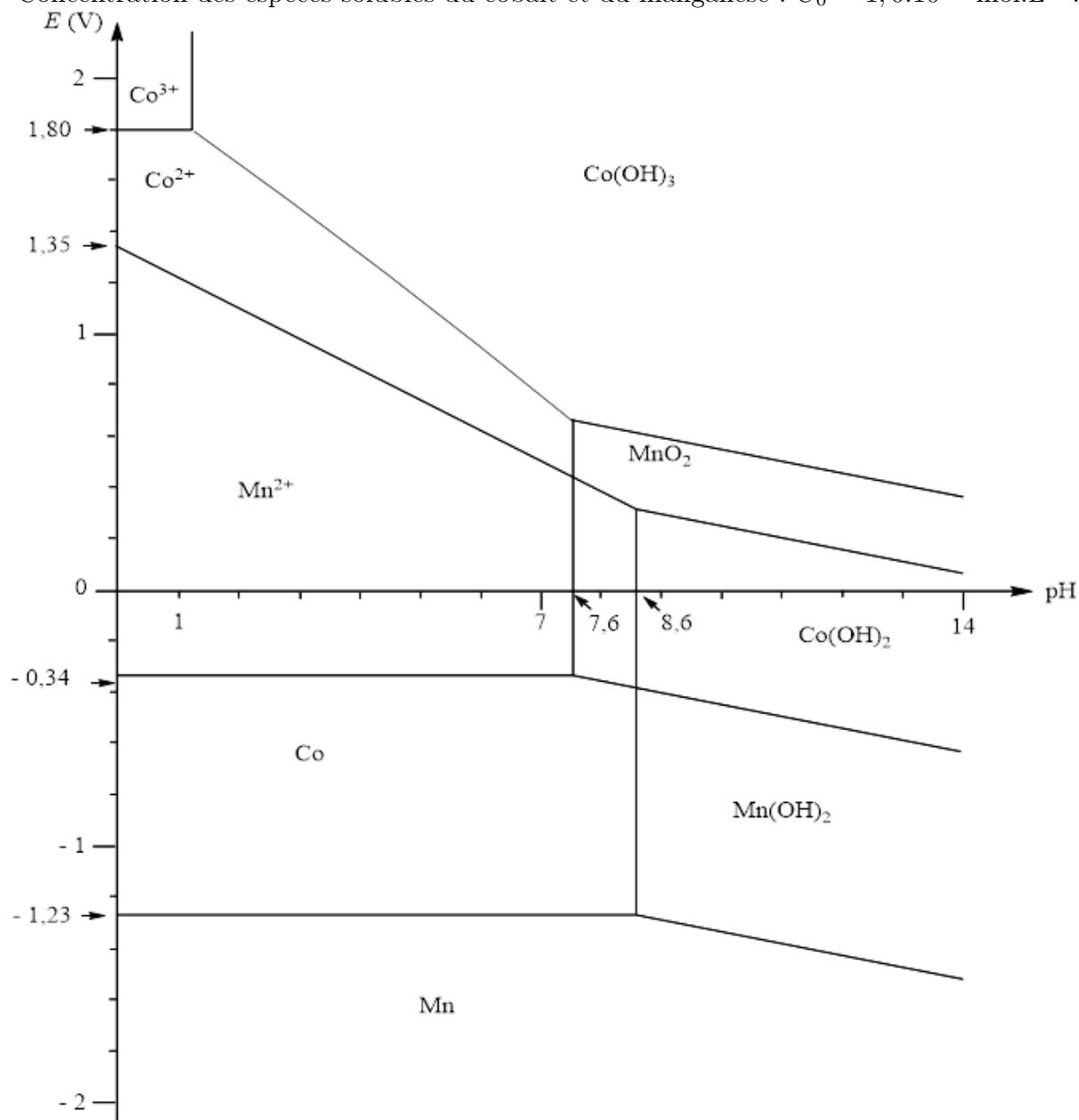
**Données thermodynamiques :**

$$E_3^\circ(\text{HClO}/\text{Cl}_2) = + 1,63 \text{ V}; E_4^\circ(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-) = + 1,36 \text{ V}.$$

9. Montrer qu'en imposant à la solution résiduelle de la question 6 un pH convenablement choisi, en présence de l'élément chlore sous une forme qu'on précisera, il est possible d'oxyder et faire précipiter une seule des deux espèces chimiques métalliques présentes dans cette solution ; ce précipité est isolé par filtration. Sous quelle forme chimique se trouve l'autre espèce métallique dans la solution résiduelle ?
10. En utilisant le diagramme potentiel-pH, montrer alors que le fait d'imposer à la solution résiduelle de la question 9 un  $\text{pH}$  basique, en présence d'un excès d'ion hypochlorite  $\text{ClO}^-$ , permet alors d'obtenir une espèce purifiée du troisième métal de l'alliage ; quel est ce composé ? Justifier.

NOM Prénom :

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Diagramme  $E = f(pH)$  simplifié du cobalt et du manganèseConcentration des espèces solubles du cobalt et du manganèse :  $C_0 = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ .*Diagramme simplifié du cobalt :*

$$E^\circ(\text{Co}^{2+}/\text{Co}_{(s)}) = -0,28 \text{ V};$$

$$E^\circ(\text{Co}^{3+}/\text{Co}^{2+}) = 1,80 \text{ V};$$

$$pK_s(\text{Co}(\text{OH})_2) = 14,8;$$

$$pK_s(\text{Co}(\text{OH})_3) = 40,5.$$

*Diagramme simplifié du manganèse :*

Le manganèse présente trois degrés d'oxydation : 0, (+ II), (+ IV).

$$E^\circ(\text{Mn}^{2+}/\text{Mn}_{(s)}) = -1,17 \text{ V};$$

$$E^\circ(\text{MnO}_{2(s)}/\text{Mn}^{2+}) = + 1,23 \text{ V};$$

$$pK_s(\text{Mn}(\text{OH})_2) = 12,8;$$

L'espèce  $\text{MnO}_2$  est insoluble, quelque soit le pH.



## Physique

Cette partie comporte 3 exercices indépendants

## Exercice 1 : La pression de radiation

Données :

Grandeur	Notation	Valeur numérique
Célérité des ondes électromagnétiques dans le vide	$c$	$3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Constante de Planck	$h$	$6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Permittivité du vide	$\varepsilon_0$	$8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Charge élémentaire	$e$	$1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse d'un électron	$m_e$	$9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

## A- Généralités sur les ondes électromagnétiques dans le vide

On considère une onde électromagnétique solution de l'équation de d'Alembert de type plane progressive monochromatique, de vecteur d'onde  $k$  et de pulsation temporelle  $\omega$ . On suppose qu'elle se propage dans la direction et le sens de  $\vec{e}_z$ . Par ailleurs, on suppose le champ électrique  $\vec{E}$  de l'onde polarisé rectilignement selon  $\vec{e}_x$ . On note  $E_0$  son amplitude et  $\varphi$  sa phase à l'origine du temps et de l'espace.

1. Établir l'équation de d'Alembert vérifiée par le champ électrique  $\vec{E}$  dans le vide. En déduire la relation entre  $c$ ,  $\varepsilon_0$  et  $\mu_0$ .
2. Donner l'expression du champ électrique réel de l'onde en un point  $M$  à l'instant de date  $t$ , noté  $\vec{E}(M, t)$ . On fera notamment apparaître  $E_0$ ,  $\omega$  et  $k$ .
3. Établir la relation de dispersion.
4. Établir la relation de structure. En déduire l'expression du champ magnétique réel de l'onde en un point  $M$  à l'instant de date  $t$ , noté  $\vec{B}(M, t)$ .
5. On note  $T$  la période temporelle de l'onde plane progressive monochromatique. Montrer que la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting vérifie la relation :

$$\langle \vec{H} \rangle = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2} \vec{e}_z.$$

## B- Pression de radiation

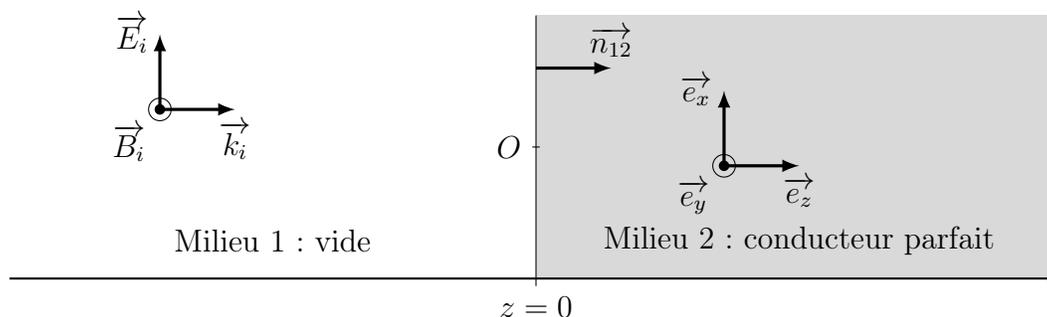


Figure 1 : Onde électromagnétique en incidence normale sur un conducteur parfait.

On considère la situation de la figure 1 où le demi-espace  $z < 0$  est le vide et le demi-espace  $z > 0$  est un conducteur parfait.

L'onde incidente décrite en partie A est réfléchi sur la surface du conducteur. On notera respectivement  $\vec{k}_i$ ,  $\vec{E}_i(M, t)$  et  $\vec{B}_i(M, t)$  le vecteur d'onde, le champ électrique et le champ magnétique de cette onde incidente en un point  $M$  à l'instant de date  $t$ . Les relations de passage utiles pour le problème sont données à la fin de l'exercice 2.

6. Définir un conducteur parfait et rappeler la valeur des champs électrique et magnétique dans un tel conducteur.
7. Déterminer l'expression du champ électrique réfléchi  $\vec{E}_r(M, t)$  en un point  $M$  à l'instant de date  $t$ . On supposera que l'onde électrique réfléchi conserve la même polarisation que l'onde incidente.
8. Déterminer l'expression du champ magnétique réfléchi  $\vec{B}_r(M, t)$  en un point  $M$  à l'instant de date  $t$ .
9. Que vaut le champ magnétique total  $\vec{B}$  en  $z = 0^-$  (dans le vide au voisinage du conducteur) ? En déduire l'expression du vecteur densité de courant de surface  $\vec{j}_s(t)$  sur la surface du conducteur, à la date  $t$ .

On admet que  $\vec{B}(z = 0, t) = \frac{1}{2}[\vec{B}(z = 0^-, t) + \vec{B}(z = 0^+, t)]$ . En outre, en présence de courants surfaciques et d'un champ magnétique, la densité surfacique de la force de Laplace s'écrit

$$\vec{f}_s = \vec{j}_s \wedge \vec{B}.$$

10. Exprimer la force de Laplace totale  $\vec{F}_L$  s'exerçant sur l'aire  $S$  de la surface du conducteur en fonction de  $\varepsilon_0$ ,  $E_0$ ,  $S$ ,  $\omega$  et  $t$ .
11. Calculer la valeur moyenne de cette force sur une période temporelle  $T$  de l'onde. En déduire que l'on peut lui associer une pression  $p$ , dite pression de radiation, dont l'expression est  $p = \varepsilon_0 E_0^2$ .

On appelle intensité  $I$  du champ électromagnétique la norme de la valeur moyenne du vecteur de Poynting. On rappelle qu'en vertu de la relation démontrée dans la question 5, on a  $I = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2}$ .

12. Calculer numériquement la pression de radiation pour la lumière issue du soleil ( $I_1 = 1 \text{ kW.m}^{-2}$ ) et pour celle issue d'un laser de haute intensité ( $I_2 = 1 \text{ GW.m}^{-2}$ ).

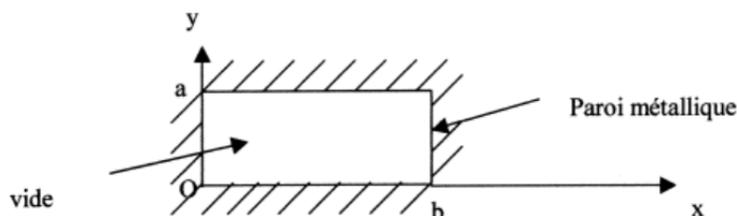
On veut désormais retrouver l'expression de la pression de radiation en décrivant la lumière de manière corpusculaire, en la modélisant par un ensemble de photons se déplaçant dans un faisceau cylindrique d'axe  $\vec{e}_z$  et de section  $S$ . On prendra une longueur d'onde  $\lambda$  de 600 nm et on appelle  $E_\gamma$  l'énergie d'un seul photon.

13. On note  $n_\gamma^*$  la densité volumique de photons dans le faisceau (on se place dans le cadre d'un modèle simple où cette densité est uniforme). Exprimer  $n_\gamma^*$  en fonction de  $E_\gamma$ ,  $c$  et de  $I$  puis calculer sa valeur numérique dans le cas du laser d'intensité  $I_2$ .
14. Sachant que la quantité de mouvement  $\vec{p}_\gamma$  d'un photon est définie par  $\vec{p}_\gamma = \frac{h}{\lambda} \vec{e}_z$ , l'exprimer en fonction de son énergie  $E_\gamma$ .
15. Déterminer l'expression vectorielle de la variation  $\Delta\vec{p}_\gamma$  de la quantité de mouvement d'un photon lors d'un rebond sur la surface métallique en fonction de  $E_\gamma$  et de  $c$ . On fait l'hypothèse d'un rebond élastique, c'est-à-dire sans perte d'énergie cinétique.

16. Exprimer la variation de quantité de mouvement  $\Delta \vec{p}_{dt}$  de l'ensemble des photons qui rebondissent sur la surface métallique d'aire  $S$  pendant une durée infinitésimale  $dt$  en fonction de  $I$ ,  $S$ ,  $dt$  et de  $c$ .
17. En déduire la force exercée par les photons sur l'aire  $S$  pendant une durée  $dt$  et retrouver l'expression de la pression de radiation.

## Exercice 2 : Étude d'un guide d'ondes et effet de dissipation

Afin de guider une onde électromagnétique plane monochromatique de fréquence  $f$  on utilise un guide d'onde. Celui-ci se présente sous la forme d'un cylindre de génératrices parallèles à  $Oz$ , de section rectangulaire dans le plan  $Oxy$ . Les parois du cylindre sont formées d'un métal parfait et le guide est de hauteur  $a$  selon  $Oy$  et de largeur  $b$  selon  $Ox$ .



On cherche à propager une onde transverse électrique de pulsation  $\omega$  dans l'espace vide situé à l'intérieur du guide, onde dont le champ électrique complexe est de la forme :

$$\vec{E}(M, t) = E(x, y) \exp(i(\omega t - kz)) \vec{u}_x$$

### A- Étude du guide d'onde

1. En utilisant une des équations de Maxwell, montrer que le champ électrique  $E(x, y)$  ne dépend pas de  $x$ . On le notera  $E(y)$ .
  2. À partir de l'équation de propagation qui régit la structure du champ électrique, en déduire l'équation différentielle vérifiée par  $E(y)$ . On posera  $\chi^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0$ .
  3. En utilisant la relation de passage du champ électrique à l'interface vide - conducteur donnée en fin d'exercice, déterminer, en la justifiant soigneusement, la valeur de  $E(y)$  en  $y = 0$  et en  $y = a$ .
  4. Résoudre l'équation vérifiée par  $E(y)$  en supposant que  $\chi^2 > 0$  avec  $\chi > 0$ . On introduira l'amplitude  $E_0 = \sup(|E_0(y)|)$ , supposée non nulle.
  5. En déduire que nécessairement  $\chi = \frac{n\pi}{a}$ , avec  $n$  entier strictement positif.
  6. Pourrait-il y avoir une solution si  $\chi^2$  était négatif ou nul?
- Dans toute la suite, on suppose que  $\chi = \frac{n\pi}{a}$  avec  $n$  entier strictement positif.
7. Déterminer le champ magnétique sous forme complexe puis sous forme réelle. Quelles conditions limites (relations de continuité) doit-il vérifier? Est ce le cas?
  8. Calculer le vecteur de Poynting, puis sa moyenne temporelle.
  9. Déterminer la puissance moyenne traversant une section droite du guide d'onde.
  10. Que se passerait-il si  $k^2$  était négatif? En déduire que le guide d'onde est un filtre passe-haut dont on déterminera la pulsation de coupure  $\omega_c$ .

11. On choisit  $a = 10$  cm. Calculer la plus basse fréquence de coupure  $f_c$ . Dans quel domaine est-elle située ?
12. La fréquence étant  $f = 3,00$  GHz, quelles sont les valeurs possibles de l'entier positif  $n$  ?
13. On donne  $n = 1, a = b = 10$  cm,  $f = 3,00$  GHz et la puissance moyenne rayonnée par la source vaut  $P = 1,00$  mW. En déduire l'expression de l'amplitude  $E_0$  du champ électrique en fonction de  $P, a, b, f$  et des constantes qui conviennent. L'application numérique donne  $E_0 = 13,2$  V.m<sup>-1</sup>.

## B- Effet de la dissipation

En fait les parois du guide sont faites d'un métal réel de conductivité  $\gamma$ . L'objet de cette partie est d'estimer la fraction d'énergie perdue par dissipation dans les parois. Le métal est un bon conducteur ; sa conductivité vaut  $\gamma = 10^6$  S.m<sup>-1</sup>.

Pour étudier cet effet, on considère, **pour simplifier les calculs**, que le métal emplit tout le demi-espace  $y > 0$ , le demi espace  $y < 0$  étant vide.

On considérera qu'en tout point du métal la densité volumique de charge est nulle.

14. Écrire les équations de Maxwell dans le métal.
15. Montrer que l'on peut numériquement, à la fréquence considérée  $f = 3,00$  GHz, négliger le « courant de déplacement » devant le courant de conduction, dans l'équation de Maxwell-Ampère.
16. En déduire l'équation de propagation du champ électrique dans le métal.

On cherche, cette fois, une solution de la forme :

$$\vec{E}(M, t) = E_{0t} \exp(i(\omega t - k'y)) \vec{u}_x$$

$E_{0t}$  étant un réel positif.

17. Montrer que l'équation de dispersion est  $\underline{k}'^2 = -i\mu_0\gamma\omega$ , et la résoudre, en posant préalablement

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}.$$

18. Montrer que la seule solution possible est de la forme :

$$\vec{E}(M, t) = E_{0t} \exp(-\frac{y}{\delta}) \exp(i(\omega t - \frac{y}{\delta})) \vec{u}_x$$

$\delta$  est nommée « épaisseur de peau » ; commenter physiquement cette dénomination.

19. Calculer la valeur numérique de  $\delta$ . Commenter cette valeur.
20. En déduire l'expression de la densité volumique complexe, puis réelle, de courant à tout instant ; calculer la puissance moyenne  $\mathcal{P}_J$  dissipée par effet Joule dans une portion de métal de section  $S$  dans le plan  $xOz$  et d'extension infinie selon  $Oy$  ( $y$  compris entre 0 et  $+\infty$ ), en fonction de  $E_{0t}$ , notamment.

L'épaisseur de peau  $\delta$  étant petite, on peut ici modéliser la distribution de courant par une distribution surfacique  $\vec{j}_s$ . On peut alors montrer que  $\vec{j}_s(t) = \frac{\delta\gamma E_{0t}}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) \vec{u}_x$  et que  $\mathcal{P}_J = \frac{j_{s,eff}^2 S}{\delta\gamma}$ .

On rappelle que la valeur efficace d'une grandeur  $A$  est  $A_{eff} = \sqrt{\langle A^2 \rangle}$ .

Pour **estimer** l'effet des pertes dans le cas d'un guide d'onde rectangulaire formé d'un métal de conductivité  $\gamma$  élevée, on conserve la solution trouvée en partie A pour un mode  $n$  quelconque en remplaçant l'amplitude  $E_0$  introduite en question A-4 par une fonction de  $z$ , notée  $E_0(z)$  et a priori inconnue. On peut alors montrer qu'en assimilant le métal à un métal parfait, la densité surfacique de courant sur les parois du guide est telle que :

- $\vec{j}_s(y=0) = \frac{E_0(z)}{\mu_0\omega} \chi \sin(\omega t - kz) \vec{u}_x$
- $\vec{j}_s(y=a) = -(1)^n \frac{E_0(z)}{\mu_0\omega} \chi \sin(\omega t - kz) \vec{u}_x$

21. Montrer que la puissance moyenne dissipée sur une tranche  $dz$  de guide, en ne tenant compte que des pertes dues aux parois précédentes, est donnée par :

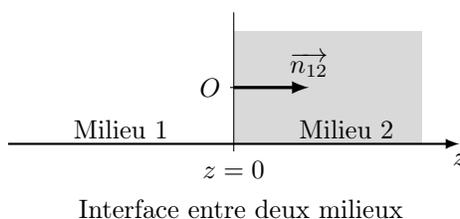
$$d\mathcal{P}_J = \frac{bE_0^2(z)\chi^2\delta}{2\mu_0\omega} dz.$$

En déduire une équation différentielle vérifiée par  $E_0^2(z)$ .

22. Déterminer  $E_0(z)$  en fonction de  $z$ ,  $E_0$  (valeur en  $z=0$ ) et une longueur caractéristique  $\ell_0$ . Comment a-t-on intérêt à choisir le mode, c'est-à-dire la valeur de l'entier  $n$  ?

## Relations de passage entre deux milieux

Utiles pour les exercices 1 et 2



Entre deux milieux 1 et 2, on a :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

avec

- $\vec{n}_{12}$  est un vecteur unitaire orthogonal à l'interface, dirigé du milieu 1 vers le milieu 2,
- les champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{B}_1$  (respectivement  $\vec{E}_2$  et  $\vec{B}_2$ ) sont les champs totaux dans le milieu 1 (respectivement dans le milieu 2) au **voisinage de l'interface**,
- $\sigma$  est la densité surfacique de charges et  $\vec{j}_s$ , le vecteur densité surfacique de courant.

### Exercice 3 : Formation d'un arc-en-ciel

Lorsque le beau temps revient juste après une averse, on observe parfois la formation d'un arc-en-ciel à l'horizon. Il s'agit d'un phénomène optique de dispersion de la lumière solaire, qui se réfracte et se réfléchit dans des gouttelettes d'eau en suspension dans l'air. La première théorie permettant d'expliquer ce phénomène a été établie par Descartes en 1637 à l'aide des lois de la réflexion et de la réfraction. Il mit en évidence qu'un observateur situé au niveau du sol reçoit un faisceau de rayons émergents correspondant au maximum de l'angle de déviation des gouttelettes d'eau. Comme celui-ci dépend de la longueur d'onde des rayons lumineux, on peut ainsi observer la dispersion de la lumière solaire. Dans cette partie, nous allons mettre en évidence les principaux résultats de cette théorie.

On considère un rayon lumineux monochromatique issu du Soleil  $S$ , qui arrive sur une gouttelette d'eau sphérique en suspension dans l'air sous un angle d'incidence  $i_1$ , comme représenté sur la Figure 1. Après une première réfraction, une réflexion et une seconde réfraction, le rayon émerge de la gouttelette sous un angle de réfraction  $i_4$ . Il se dirige alors vers un observateur  $O$  situé au niveau du sol. On suppose que l'air est un milieu d'indice optique égal à 1, et on note  $n$  l'indice optique de l'eau.

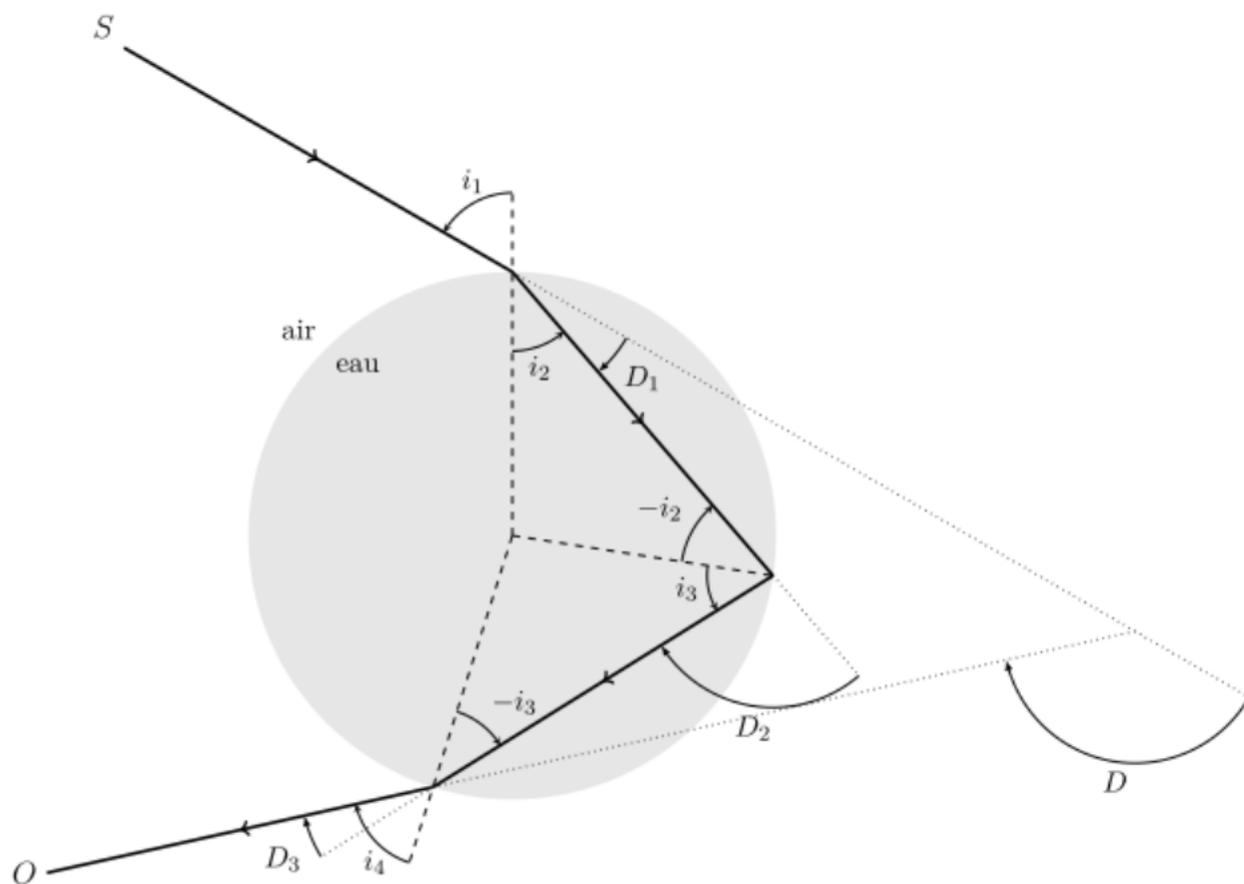


Figure 1 : Trajet d'un rayon lumineux dans une gouttelette d'eau sphérique en suspension dans l'air.

L'orientation des différents angles à chaque interface est définie sur la Figure 1, et on définit positivement les angles orientés dans le sens trigonométrique.

1. Exprimer les angles de déviation  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  à chaque interface en fonction de  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  et  $i_4$  (en tenant compte de l'orientation de ces angles).
2. À l'aide des lois de Snell-Descartes, exprimer les angles  $i_2$ ,  $i_3$  et  $i_4$  en fonction de  $i_1$  et  $n$ .
3. En déduire que l'angle de déviation totale  $D$  peut s'exprimer ainsi :

$$D = 4 \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right) - 2i_1 - \pi.$$

On représente l'évolution de  $D$  en fonction de  $i_1$  sur la Figure 2, en prenant  $n = 1,33$  pour l'indice optique de l'eau. L'angle de déviation présente un maximum  $D_{max}$  pour un certain angle d'incidence  $i_{1,max}$  qui correspond au faisceau de rayons émergents reçu par l'observateur.

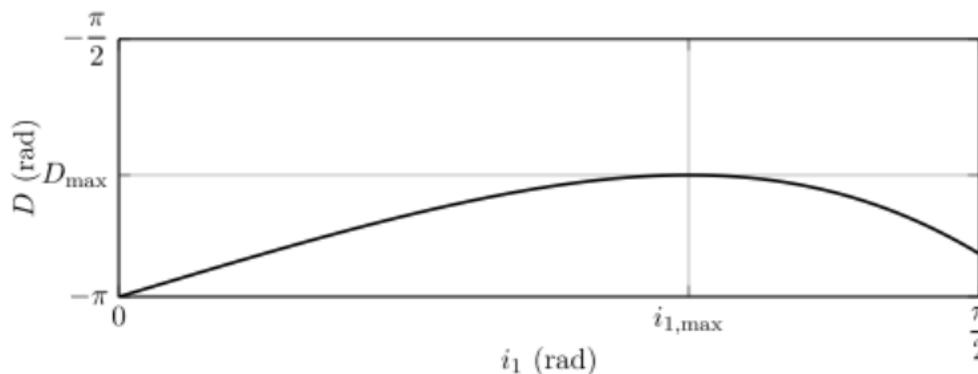


Figure 2 : Évolution de l’angle de déviation  $D$  en fonction de l’angle d’incidence  $i_1$ .

On rappelle que la dérivée de la fonction trigonométrique  $f(x) = \arcsin(x)$  s’exprime par :

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. Montrer que l’angle d’incidence  $i_{1,max}$  vérifie l’équation suivante :

$$\sin i_{1,max} = \frac{\sqrt{4-n^2}}{3}.$$

5. En déduire l’expression du maximum  $D_{max}$  en fonction de  $n$ .

On représente l’évolution de  $D_{max}$  en fonction de  $n$  sur la Figure 3, pour  $1 \leq n \leq 2$ .

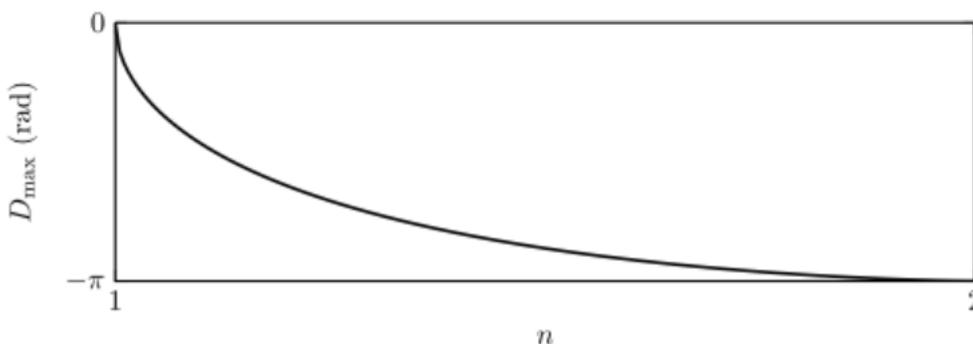


Figure 3 : Évolution du maximum  $D_{max}$  en fonction de l’indice optique  $n$ .

L’eau étant un milieu dispersif, son indice optique  $n$  dépend de la longueur d’onde  $\lambda$  du rayon lumineux considéré. En 1836, Cauchy établit que l’indice optique d’un tel milieu peut s’exprimer sous la forme :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

avec  $A$  et  $B$  des constantes positives caractéristiques du milieu.

6. Comment évolue le maximum  $D_{max}$  lorsque la longueur d’onde  $\lambda$  augmente ? Justifier votre raisonnement.
7. Rappeler l’intervalle de longueur d’onde constituant le spectre visible.
8. Lorsque l’observateur  $O$  situé au niveau du sol regarde l’arc-en-ciel, aperçoit-il l’anneau rouge situé au-dessus ou en-dessous de l’anneau violet ? Justifier votre raisonnement.

Lorsque les conditions d’observation sont excellentes, il est possible d’apercevoir un second arc-en-ciel dans le ciel, situé au-dessus de l’arc-en-ciel précédemment étudié. Il est même possible d’observer, dans de très rares occasions, un troisième arc-en-ciel qui s’ajoute aux deux précédents.

9. En considérant toujours des gouttelettes d’eau sphériques en suspension dans l’air, expliquer l’origine de ces différents arcs-en-ciel.