Chapitre 22

Statique des fluides

Objectifs : Etablir un profil de pression dans un fluide.
Calculer la résultante des actions de pression.

Table des matières

I Description d'un fluide **2**
I.1 Echelles d'étude . . . 2
I.2 Densité de force . . . 3
I.3 Force de pression . . . 5

II Statique des fluides **6**
II.1 Loi fondamentale de la statique des fluides . . . 6
II.2 Profil de pression dans un fluide incompressible . . . 7
II.3 Modèle de l'atmosphère isotherme . . . 9

III Evaluation des forces pressantes **10**
III.1 Poussée d'Archimède . . . 10
III.2 Calcul d'une résultante des actions de pression . . . 11
III.2.a Surface de direction constante . . . 11
III.2.b Surface de direction variable . . . 12
III.2.c Utilisation d'un autre système . . . 13

I Description d'un fluide

I.1 Echelles d'étude

Il n'est pas aisé de donner une définition univoque d'un fluide. On adoptera dans le cadre de ce cours une définition nous permettant de déduire une méthode d'étude des fluides statique ou en écoulement.

Définition :
On appelle **fluide**, un milieu matériel déformable dans lequel les particules constitutives (atomes, molécules, ions...) peuvent se déplacer les unes par rapport aux autres :
- sur des distances grandes devant la taille caractéristique des particules : le fluide est un gaz.
- sur des distance de l'ordre de la taille d'une particule : le fluide est un liquide.

Exemple :

Considérons l'atmosphère considérée comme un gaz parfait.
Dans ce cas l'ordre de grandeur du rayon d'une molécule est $d \sim 10^{-10}\,\text{m}$. Le système : {une molécule} dans le référentiel galiléen du laboratoire, possède une énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} m \left\langle v^2 \right\rangle = \frac{3}{2}.k_B.T$$

avec $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ la vitesse quadratique moyenne pour laquelle on fait **l'hypothèse ergodique** : la vitesse moyenne d'une molécule est égale à la moyenne des vitesses de l'ensemble des molécules.
Alors l'expression précédente donne :

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3.k_B.T}{m}}$$

A $T = 25\,^\circ\text{C} = 298\,\text{K}$, $m = 32.10^{-27}\,\text{kg}$ et $k_B = 1,38.10^{-23}\,\text{J.K}^{-1}$ la constante de Boltzmann :

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} \approx 620\,\text{m.s}^{-1}$$

La vitesse quadratique moyenne d'une molécule dans l'atmosphère est donc : $\sqrt{\langle v^2 \rangle} \approx 620\,\text{m.s}^{-1}$, elle correspond à la moyenne de la vitesse des molécules entre deux chocs successifs des molécules entres elles.

On peut aussi évaluer la distance caractéristique entre deux chocs successifs. Cette distance s'appelle **le libre parcours moyen**. Celui-ci s'exprime :

$$l_{pm} = \frac{1}{\sigma.n_v}$$

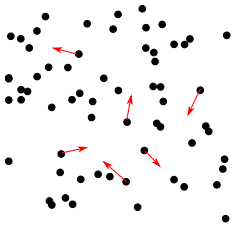
avec :
• σ la section efficace d'un choc, dans le modèle des sphères dures elle correspond à la projection d'une surface sphérique dont le rayon est celui d'une molécule, sur une surface plane orthogonale à la vitesse des molécules.
• n_v est la densité particulaire en m^{-3}.
En terme d'ordre de grandeur : $\sigma \sim d^2 = 10^{-20}\,\text{m}$ où d est la taille caractéristique d'une molécule. Comme $PV = N.k_B.T$ on peut estimer :

$$n_v = \frac{N}{V} = \frac{P}{k_B.T}$$

et pour $P = 1\text{bar} = 10^5\,\text{Pa}$ on trouve : $n_v \sim 10^{25}\,\text{m}^{-3}$ alors : $\sigma.n_v = 10^5\,\text{m}^{-1}$. En conclusion :

$$l_{pm} \sim 10^{-5}\,\text{m} = 100\,\mu\text{m}$$

Entre deux chocs successifs les molécules d'air se déplacent sur une distance $l_{pm} \gg d$

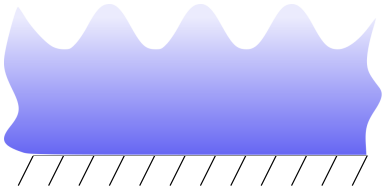


Echelle microscopie

A cette échelle, le fluide est un milieu discontinu constitué d'un ensemble de particules en mouvement sous l'effet de l'agitation thermique. Les molécules se déplacent de façon désordonnées à des vitesses de l'ordre de la vitesse quadratique moyenne telle que en terme vectorielle $\langle \overrightarrow{v} \rangle = \overrightarrow{0}$. Leur déplacement se fait sur des distances de l'ordre de l_{pm} allant de $100\,\mu$m pour un gaz à quelques centaines de nanomètre pour un liquide.

Propriété :
A l'échelle microscopique, un fluide est caractérisé par des interactions intermoléculaire suffisamment faible devant l'énergie d'agitation thermique $k_B.T$ pour que les molécules puissent se déplacer les unes par rapport aux autres.

Echelle macroscopique



A cette échelle le fluide est un milieu continu, cependant les grandeurs thermodynamiques descriptive du fluide ne sont pas homogènes : $P(M)$, $\rho(M)$, $T(M)$... sont des fonctions du point M d'étude dans le fluide.
C'est l'échelle d'étude des phénomènes météorologiques. Le fluide est capable de se déformer et de s'écouler lorsqu'on lui applique de faibles contraintes.

Echelle mésoscopique

Il s'agit d'une échelle intermédiaire pour laquelle le fluide est étudié comme un ensemble de volume de contrôle tel que la taille caractéristique de ce volume soit grande devant l_{pm} et qu'il contienne un assez grand nombre de particules pour pouvoir définir les grandeurs thermodynamiques.
Ces dernières sont homogène à cette échelle et la masse d'une particule fluide est constante δm.

Définition :
On appelle **particule fluide** un système fermé mésoscopique de masse δm, constante au cours du temps, correspondant au fluide à l'intérieur d'un volume de contrôle $d\tau$:

$$\delta m = \rho(M,t).d\tau(M)$$

avec $\rho(M,t)$ le champ de masse volumique.

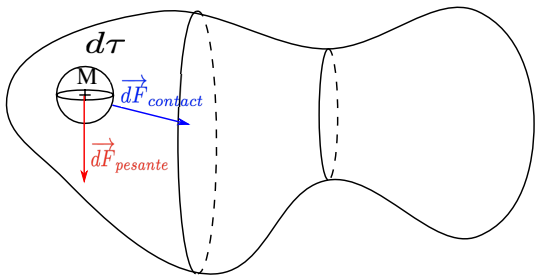
Remarque :

En valeur moyenne, il y a autant de molécules entrantes que sortantes de la particule fluide, la masse peut donc être considérée constante.
Dans toute la suite : "pression au point M" signifiera : "pression dans le volume mésoscopique de volume caractéristique $d\tau$ centré en M".

La taille caractéristique d'une particule fluide sera fonction du fluide étudié. En effet dans un gaz pour lequel $l_{pm} \sim 100\,\mu$m on peut raisonnablement choisir une particule fluide taille caractéristique $l \sim 10\,$mm. De façon plus précise il faut également tenir compte des échelles de longueur pour lesquelles on peut considérer les grandeurs locales $P(M)$, $T(M)$... uniformes.

I.2 Densité de force

Considérons une particule fluide au sein d'un fluide dans un référentielle galiléen.



Cette particule fluide est soumise à un ensemble de forces :
i- forces à distances : comme le poids ou force pesante : $\overrightarrow{dF}_{pesnate}$.
ii- forces de contact : comme par exemple la force de réaction du support, ici on les notera $\overrightarrow{dF}_{contact}$.
Ces forces de contact agissent sur la surface de la particule fluide, on peut alors définir une force par unité de surface de la particule fluide.

Définition :
On appelle **force surfacique** ou **densité surfacique de forces**, les forces s'exerçant sur la surface de contrôle d'une particule fluide. Elles décrivent les actions de contact :

$$\overrightarrow{f}_s = \frac{\overrightarrow{dF}_{contact}}{dS}$$

exprimée en $\mathrm{N.m^{-2}}$

Exemples :
- force surfacique de pression.
- force surfacique de frottement.

Une particule fluide peut subir ces actions de contact de la part des autres particules fluides l'environnant, ou de la part des surfaces limites solides.

Définition :
On appelle **force volumique** ou **densité volumique de force**, une force par unité de volume. Elles décrivent les actions à distance et s'exercent dans le volume de la particule fluide (centre de masse).

$$\overrightarrow{f}_v = \frac{\overrightarrow{dF}}{d\tau}$$

exprimée en $\mathrm{N.m^{-3}}$.

Exemples :
- force volumique de pesanteur :

$$\frac{\overrightarrow{dF}_{pesante}}{d\tau} = \frac{\delta m\overrightarrow{g}}{d\tau}$$

et comme par définition $\rho(M) = \dfrac{\delta m}{d\tau}$ alors :

$$\overrightarrow{f}_{v,pesante} = \rho(M)\overrightarrow{g}.$$

- force volumique de Coulomb :

$$\frac{\overrightarrow{dF}_{Coulomb}}{d\tau} = \frac{\delta q\overrightarrow{E}}{d\tau} = \rho_{charge}(M)\overrightarrow{E}(M)$$

avec $\rho_{charge}(M)$ la densité volumique de charges en M.

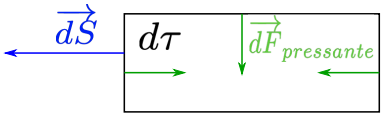
Propriété :
Les densités volumique et surfacique de force sont des grandeurs locales intensives. Elles sont définit pour chaque particule fluide, on dira en chaque point du fluide.

De façon générale on travaillera avec des grandeurs intensives locales afin d'avoir une description des fluides indépendantes du volume choisi de la particule fluide. Les lois déduites pourront alors être généralisées à différentes situations.

I.3 Force de pression

Considérons dans un référentielle galiléen $\mathcal{R}_g$, une particule fluide, au sein d'un fluide immobile dans $\mathcal{R}_g$. La force de pression s'exerçant sur une surface de la particule fluide considérée de la part du fluide environnant s'exprime :

$$d\overrightarrow{F}_{pressante} = -P(M)\overrightarrow{dS}$$



$\overrightarrow{dS}$ étant orienté de la particule fluide vers le fluide extérieur, c'est-à-dire vers l'extérieur de la particule fluide. On peut définir une densité surfacique de force pressante telle que :

$$\overrightarrow{F}_{pressante} = \oiint -P(M)\overrightarrow{dS} = \oiint \overrightarrow{f}_s.dS$$

Propriété :
La force de pression exercée sur un corps de la part du fluide environnant, est une force de contact s'exprimant :

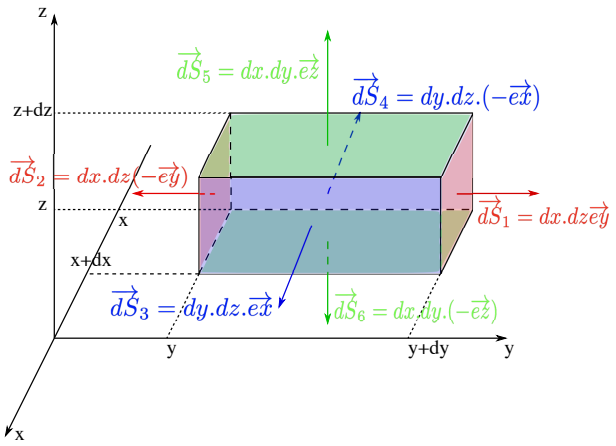
$$d\overrightarrow{F}_{pressante} = -P(M).\overrightarrow{dS}$$

dirigée du fluide vers l'intérieur du corps (ou de la particule fluide).

$$\overrightarrow{F}_{pressante} = -\oiint P(M).\overrightarrow{dS}$$

La surface étant orientée vers l'extérieur du corps.

Cherchons à exprimer la résultante des actions de pression sur une particule fluide en utilisant l'expression de la force pressante donnée ci-dessus. On isole une particule fluide : le fluide environnant exerce des actions de pression sur chacune des surfaces de la particule fluide tel que :



$$\begin{aligned}
d\overrightarrow{F}_{press,6}(x,y,z) &= -P(x,y,z)dx.dy(-\overrightarrow{e_z}) \\
d\overrightarrow{F}_{press,5}(x,y,z+dz) &= -P(x,y,z+dz)dx.dy.\overrightarrow{e_z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\overrightarrow{F}_{press,2}(x,y,z) &= -P(x,y,z)dx.dz.(-\overrightarrow{e_y}) \\
d\overrightarrow{F}_{press,1}(x,y+dy,z) &= -P(x,y+dy,z).\overrightarrow{e_y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\overrightarrow{F}_{press,4}(x,y,z) &= -P(x,y,z)dy.dz(-\overrightarrow{e_x}) \\
d\overrightarrow{F}_{press,3}(x+dx,y,z) &= -P(x+dx,y,z)dy.dz\overrightarrow{e_x}
\end{aligned}$$

En développant la somme :

$$d\overrightarrow{F}_{press,5}(x,y,z+dz) + d\overrightarrow{F}_{press,6}(x,y,z) = \left(-P(x,y,z+dz) + P(x,y,z)\right)dx.dy.\overrightarrow{e_z} = -\frac{\partial P}{\partial z}d\tau\overrightarrow{e_z}$$

Il vient de même : $d\overrightarrow{F}_{press,1}(x,y+dy,z)+d\overrightarrow{F}_{press,2}(x,y,z) = (-P(x,y+dy,z)+P(x,y,z))\,dx.dz.\overrightarrow{e_y} = -\dfrac{\partial P}{\partial y}d\tau\overrightarrow{e_y}$
et $d\overrightarrow{F}_{press,3}(x+dx,y,z)+d\overrightarrow{F}_{press,4}(x,y,z) = (-P(x+dx,y,z)+P(x,y,z))\,dy.dz.\overrightarrow{e_x} = -\dfrac{\partial P}{\partial x}d\tau\overrightarrow{e_x}$

La résultante des actions de pression se trouve en additionnant les trois expressions précédentes et on trouve :

$$d\overrightarrow{F}_{press,tot} = \left(-\frac{\partial P}{\partial x}\overrightarrow{e_x} - \frac{\partial P}{\partial y}\overrightarrow{e_y} - \frac{\partial P}{\partial z}\overrightarrow{e_z}\right)d\tau = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(P)d\tau$$

Propriété :
La résultante des actions de pression s'exerçant sur une particule fluide de volume $d\tau$ de la part du fluide environnant s'exprime :

$$d\overrightarrow{F}_{press} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(P)d\tau$$

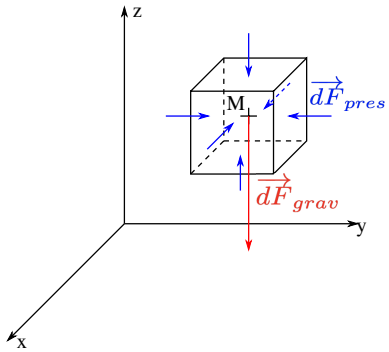
avec $\overrightarrow{f}_{press} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(P)$ la densité volumique des actions de pression.

II Statique des fluides

II.1 Loi fondamentale de la statique des fluides

Considérons un fluide au repos dans un champ de pesanteur, dans un référentielle galiléen. On isole une particule fluide.
Le bilan des actions mécaniques donne :
i- poids : $d\overrightarrow{F}_{grav} = \delta m\overrightarrow{g} = \rho(M).\overrightarrow{g}\,d\tau$
ii- pression : $d\overrightarrow{F}_{pres} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(P)d\tau$
Dans l'hypothèses où les seules forces sont celles de gravité et de pression. L'équilibre de la particule fluide s'exprime :

$$\overrightarrow{0} = d\overrightarrow{F}_{grav} + d\overrightarrow{F}_{pres}$$



Ce qui donne en terme de densité volumique de force :

$$\rho(M).\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\,(P) = \overrightarrow{0}$$

Propriété :
Loi fondamentale de la statique des fluides :
Dans un référentiel galiléen, l'équilibre d'un fluide au repos est décrit par la loi fondamentale de l'hydrostatique, équilibre entre la force volumique de pesanteur et la force volumique de pression :

$$\rho(M).\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\,(P) = \overrightarrow{0}$$

Remarque :
i- Cette équation traduit le fait que dans un champ de pesanteur la variation de pression statique est due au poids volumique de fluide.
ii- Si le fluide est au repos sous l'action d'autres forces en plus de la force de pesanteur, alors il suffit de tenir compte dans l'équilibre des densités volumiques correspondantes. Par exemple supposant qu'en plus du champ de pesanteur il existe un champ électrique et que le fluide est un plasma.
Il faut tenir compte de la densité volumique des actions de Coulomb : $d\overrightarrow{F}_{Coul} = \rho_{charges}(M)\overrightarrow{E}(M)d\tau$, alors l'équilibre statique de la particule fluide se traduit par :

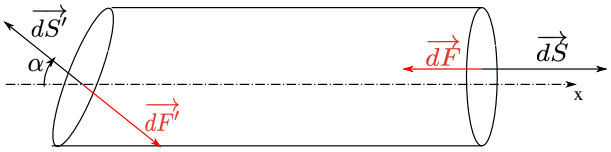
$$\rho(M).\overrightarrow{g} + \rho_{charges}(M).\overrightarrow{E}(M) - \overrightarrow{\text{grad}}\,(P) = \overrightarrow{0}$$

iii- De plus $\overrightarrow{\text{grad}}\ (P)$ est un vecteur orthogonal aux surfaces isobares, c'est-à-dire aux surfaces sur lesquelles $P = cte$. Comme $\rho(M)\overrightarrow{g}. = \overrightarrow{\text{grad}}\ (P)$ les surfaces isobares sont localement (en un point M) orthogonales aux champ de pesanteur.

Propriété :
Lorsque le fluide se situe dans un champ de pesanteur, les surfaces isobares sont orthogonales au champ de pesanteur.

Propriété :
Corollaire
A la surface de la Terre, la surface libre d'un fluide à l'équilibre est horizontale, il y a continuité de part et d'autre de cette surface de la pression.

Exemple :



Considérons un volume cylindrique de section droite dS, on cherche à exprimer dans une fluide statique dans un référentielle galiléen, la force de pression sur la surface $\overrightarrow{dS'}$.

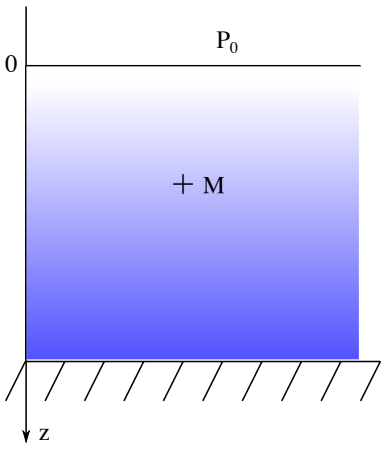
$$\overrightarrow{dF'} = -P'\overrightarrow{dS'}$$
$$\overrightarrow{dF} = -P\overrightarrow{dS}$$

A l'équilibre statique du fluide : $\overrightarrow{dF}_{press} + \overrightarrow{dF}_{grav} = \overrightarrow{0}$ et donc en projection suivant $\overrightarrow{e_x}$ on trouve : $-PdS + P'dS'\cos\alpha = 0$. Or comme $dS'\cos\alpha = dS$ il vient :

$$P' = P$$

Propriété :
Au repos dans un fluide, la pression exercée par le fluide sur une surface est indépendante de l'inclinaison de cette surface.

II.2 Profil de pression dans un fluide incompressible



Système : { particule fluide centrée en M }.
Considérons le référentielle terrestre galiléen.
On cherche à décrire l'évolution de la pression dans les océans, considérés à l'équilibre dans le référentielle terrestre. L'eau est supposée être un fluide incompressible.
Le bilan des forces exercées sur la particule fluide dans le champ de pesanteur terrestre donne :

$$\overrightarrow{f}_{grav} = \rho.\overrightarrow{g}$$
$$\overrightarrow{f}_{press} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ (P)$$

La loi fondamentale de l'hydrostatique donne :

$$\rho.\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\ (P) = \overrightarrow{0}$$

En projection sur les trois directions de la base cartésienne :

$$/\overrightarrow{e_x} \quad : \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad /\overrightarrow{e_y} \quad : \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad /\overrightarrow{e_z} \quad : \rho.g - \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

Les deux premières équations traduisent le fait que la pression n'est pas une fonction de x et de y. Finalement on doit résoudre :

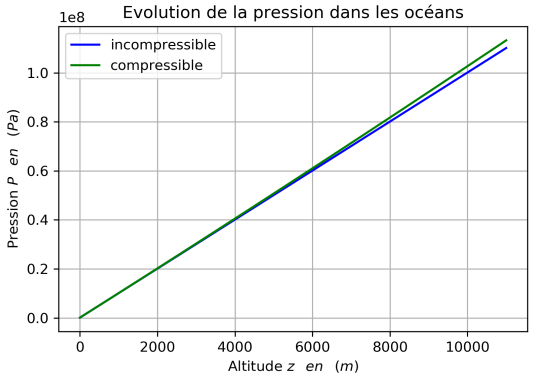
$$\frac{dP}{dz} = \rho.g$$
$$\int_0^z \frac{dP}{dz}dz = \int_0^z \rho.g.dz$$
$$P(z) - P_0 = \rho.g.z$$
$$P(z) = P_0 + \rho.g.z$$

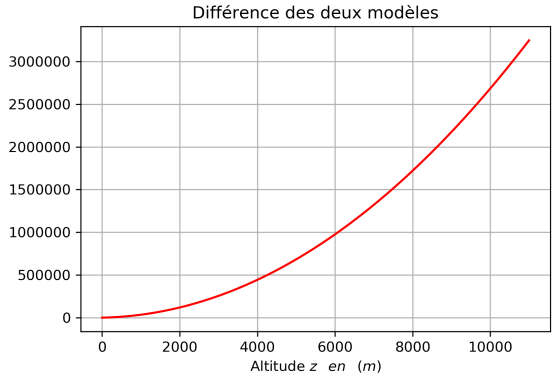
En prenant les valeurs standard : $P_0 = 1\text{bar} = 10^5\,\text{Pa}$, $\rho = 1000\,\text{kg.m}^{-3}$ et $g \approx 10\,\text{m.s}^{-2}$. Si $z = 10\,\text{m}$ on trouve :

$$\rho.g.z = 10^3.10^2 = 10^5\,\text{Pa}$$

On retrouve le résultat classique d'une augmentation de la pression de 1 bar tous les 10 m dans l'eau.

Au point le plus profond des océans sur Terre, dans la fosse des Mariannes $z \approx 11000\,\text{m}$, le modèle du fluide incompressible prévoit une pression de $P_{Mariannes} = 10^5 + 10^3.10.1,1.10^4 \approx 10^8\,\text{Pa}$.
Cependant dans ces conditions on ne peut pas considérer que l'eau reste un fluide incompressible. Dans un modèle de fluide isotherme on trouve le résultat suivant :





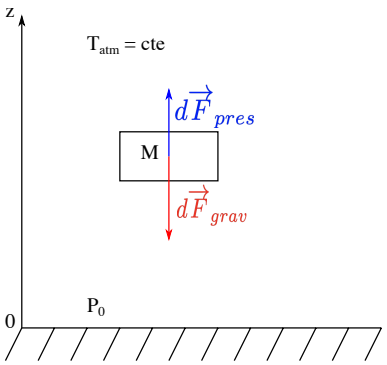
Pour le modèle de fluide compressible on tient compte de la compressibilité isotherme de l'eau $\chi_T = 5.10^{-10}\,\text{m}^2.\text{N}^{-1}$.
On remarque qu'à 4000 m la différence des deux pressions est de l'ordre de 5 bar et d'environ 30 bar au plus profond de la fosse des Mariannes.
Ce qui donne les écarts relatifs suivants dans les deux cas :

$$\frac{\Delta P}{P}(4000\,\text{m}) = 0,1\% \quad \frac{\Delta P}{P}(11000\,\text{m}) = 0,3\%$$

Cependant il faudrait aussi tenir compte de la variation de température de l'eau avec la profondeur pour affiner le modèle d'évolution de la pression.

II.3 Modèle de l'atmosphère isotherme

Définition :
On appelle **atmosphère isotherme** le modèle d'atmosphère pour lequel la température est constante



Considérons que l'air se comporte comme un gaz parfait, alors $PV = n.R.T$.
On cherche l'évolution dans l'atmosphère de $P(z)$ avec z l'altitude du point M considéré par rapport au sol.
Le référentiel terrestre est supposé galiléen, et l'atmosphère est supposée être au repos dans le référentiel terrestre.
Système : { particule fluide dans l'atmosphère}.
Le bilan des actions mécaniques donne :

i- $\overrightarrow{f}_{grav} = \rho.\overrightarrow{g}$;
ii- $\overrightarrow{f}_{pres} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,(P)$.

La loi fondamentale de l'hydrostatique donne :

$$\rho.\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\,(P) = \overrightarrow{0}$$

et les projections sur les vecteurs de la base cartésienne :

$$/\overrightarrow{e_x} \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad /\overrightarrow{e_y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad /\overrightarrow{e_z} \quad -\rho.g - \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

La pression $P(M) = P(z)$ n'est une fonction que de l'altitude z de la particule fluide. Ici il faut prendre garde au fait que l'atmosphère est constitué d'un gaz compressible, on doit donc trouver une relation entre la masse volumique ρ et la pression P puisque ces deux grandeurs ne sont plus indépendante.
La loi des gaz parfait : $PV = nRT$ nous donne la solution :

$$PV = \frac{m}{M_a}RT$$

$$P = \frac{m}{V}\frac{RT}{M_a}$$

$$P = \rho.\frac{RT}{M_a}$$

avec M_a la masse molaire de l'air. L'équation différentielle de l'hydrostatique s'écrit en tenant compte cette dépendance :

$$\frac{dP}{dz} + \frac{M_a.g}{RT}.P = 0$$

On remarque que $\dfrac{RT}{M_a.g}$ est homogène à une distance.

Définition :
Dans le modèle de l'atmosphère isotherme on appelle **facteur d'échelle** noté H, exprimé en m la grandeur telle que :

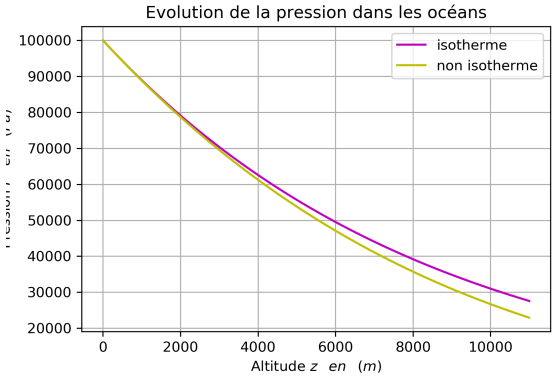
$$H = \frac{RT}{M_a.g}$$

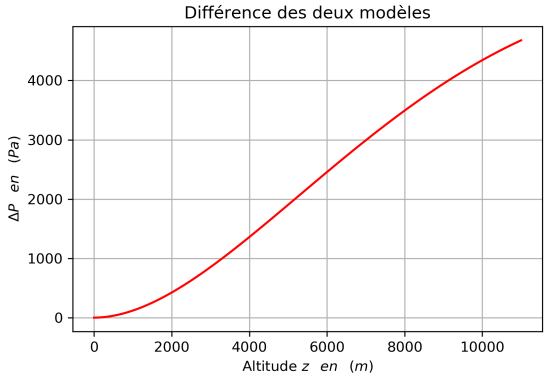
On peut en calculer un ordre de grandeur : pour $T = 298\,\text{K}$, $g = 9,81\,\text{m.s}^{-2}$, $R = 8,314\,\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ et $M_a = 29\,\text{g.mol}^{-1}$.

$$H \approx 8700\,\text{m}$$

La solution de l'équation différentielle précédente donne la pression en fonction de l'altitude :

$$P(z) = P_0.e^{-\frac{z}{H}}$$





Comme précédemment on peut comparer les résultats données par le modèle de l'atmosphère isotherme avec un modèle un peu plus raffiné. Notamment on sait que dans la troposphère la température de l'air décroit linéairement de $0,65\,°C$ tous les $100\,m$. En tenant compte de cette variation on trouve le profil de pression en jaune sur le graphique ci-dessus. La pression étant plus faible à altitude égale qu'avec le modèle d'atmosphère isotherme.
De même on peut calculer l'erreur relative faite à une altitude de l'ordre de H. Soit :

$$\frac{\Delta P}{P}(8000\,\text{m}) \approx 1\%$$

On commet alors une erreur relative de 1% sur la valeur de la pression en choisissant le modèle d'atmosphère isotherme à $8000\,m$.

Pour pousser plus loin l'analyse de cette expression de la pression notons que : $H = \dfrac{RT}{Ma.g} = \dfrac{k_B.T}{m_{mol}.g}$ avec m_{mol} la masse d'une molécule d'air. Alors la pression en z s'exprime :

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{m_{mol}.g.z}{k_B.T}}$$

On remarque que l'argument du facteur exponentielle est une compétition entre l'énergie potentielle gravitationnelle des molécules : $-m_{mol}.g.z$ qui à tendance à faire augmenter la pression et l'énergie d'agitation thermique $k_B.T$ qui elle a tendance à faire diminuer la pression.

III Evaluation des forces pressantes

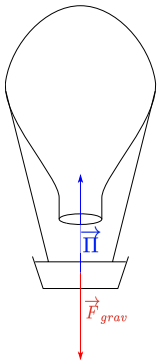
III.1 Poussée d'Archimède

Définition :
On appelle **poussée d'Archimède** la résultante des actions de pression exercée par un fluide statique dans un référentiel $\mathcal{R}$, sur un corps immergé.

Propriété :
Théorème d'Archimède :
Dans un référentiel galiléen, considérons un fluide statique. On appelle **volume de fluide déplacé** le volume de fluide qui occuperait celui d'un solide immergé en l'absence de celui-ci.
La poussée d'Archimède s'exerçant sur un corps immergé est égale au poids du fluide déplacée dirigé en sens opposé au champ de gravitation :

$$\overrightarrow{\Pi} = -m_f.\overrightarrow{g} = -\rho_{fluide}.V_{solide}.\overrightarrow{g}$$

Exemple :
Une montgolfière est en équilibre dans l'atmosphère sous l'action de son poids et de la poussée d'Archimède.



Système : { Montgolfière}.
Le référentiel terrestre est supposé galiléen et l'atmosphère statique dans le référentiel terrestre.
Le bilan des actions mécaniques sur la Montgolfière donne :
i- Son poids $\overrightarrow{F}_{grav} = m.\overrightarrow{g}$;
ii- La poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\Pi} = -\rho_{air}.V_{ballon}.\overrightarrow{g}$.
Celle-ci étant majoritairement due au volume du ballon plus qu'à la nacelle qu'on considérera de volume négligeable devant celui du ballon. Alors on peut trouver quel doit être le volume du ballon pour que la Montgolfière soit en équilibre sous l'action de ces deux forces :

$$\overrightarrow{F}_{grav} + \overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{0}$$

donne :

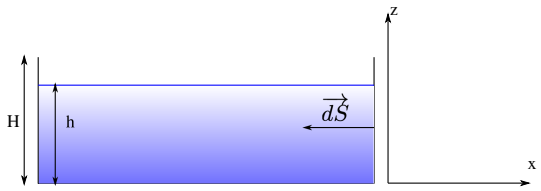
$$V_{ballon} = \frac{m}{\rho_{air}}$$

III.2 Calcul d'une résultante des actions de pression

III.2.a Surface de direction constante

Exemple de l'aquarium :

Considérons un aquarium de hauteur H et de profondeur l, rempli d'eau sur une hauteur $h < H$. On cherche à calculer les actions de pression sur les faces de l'aquarium.
Ici chacun des faces est une surface de direction constante, on peut faire le calcul directe de ces actions de pression. Prenons par exemple une face de surface $H.l$, le vecteur surface est $\overrightarrow{dS} = -dz.dy.\overrightarrow{e_x}$.
La résultante des actions de pression sur cette face est :



$$\overrightarrow{F}_{pression} = -\iint P(z).\overrightarrow{dS}$$

L'eau étant supposé incompressible la pression $P(z) = P_0 + \rho.g.(h-z)$ en prenant $z = 0$ au fond de l'aquarium. Alors :

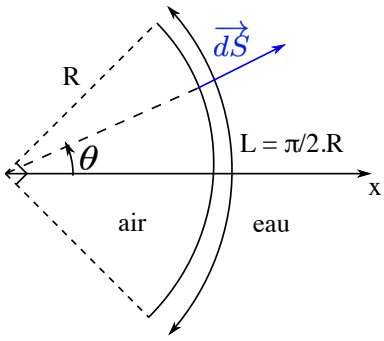
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_{pression} &= \iint \left(P_0 + \rho.g.(h-z)\right).dy.dz\overrightarrow{e_x} \\
\overrightarrow{F}_{pression} &= l.\left\{\int_0^h P_0.dz + \rho.g\int_0^h (h-z)dz\right\}\overrightarrow{e_x} \\
\overrightarrow{F}_{pression} &= lhP_0\overrightarrow{e_x} + \rho.g.\frac{l.h^2}{2}\overrightarrow{e_x}
\end{aligned}$$

Propriété :
Lorsque la surface est de direction constante on peut calculer la résultante des actions de pression d'un fluide sur cette surface par calcul direct de l'intégrale :

$$\overrightarrow{F}_{pression} = -\iint P(z).\overrightarrow{dS}$$

III.2.b Surface de direction variable

Exemple du barrage hémicylindrique :



Considérons un barrage hémicylindrique retenant un réservoir d'eau de hauteur H, statique dans le référentielle terrestre galiléen. La force de pression exercée par l'ensemble des fluides (air et eau) sur la surface du barrage s'exprime :

$$d\overrightarrow{F}_{pression} = -P_{eau}\overrightarrow{dS} + P_{air}\overrightarrow{dS}$$

avec $\overrightarrow{dS} = Rd\theta.dz\overrightarrow{e_r}$.
Le profil de pression dans l'eau donné par la loi fondamentale de l'hydrostatique donne : $P_{eau}(z) = P_0 + \rho.g.(H - z)$ si on choisi $z = 0$ au fond de la retenue d'eau. Face à l'évolution de la pression dans l'eau on peut négliger la variation avec l'altitude de la pression dans l'air. On considère $P_{air} = P_0$. Alors :

$$\overrightarrow{F}_{pression} = -\iint (P_{eau} - P_{air})\overrightarrow{dS} = -\iint \rho.g.(H - z)R.d\theta.dz\overrightarrow{e_r}$$

Il faut faire attention ici, il n'est pas direct de calculer $\int_0^{\pi/2} d\theta\overrightarrow{e_r}$, puisque le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ change de direction avec l'angle θ. On commence par étudier les symétries du problème.
La résultante des actions de pression est finalement dirigée suivant $\overrightarrow{e_x}$. On fait le calcul de la projection de cette résultante :

$$\overrightarrow{F}_{pression}.\overrightarrow{e_x} = -\iint \rho.g.(H - z)Rd\theta.dz\overrightarrow{e_r}.\overrightarrow{e_x}$$

$$\overrightarrow{F}_{pressoin}.\overrightarrow{e_x} = -\int_0^{\pi/2}\int_0^{H} \rho.g.(H - z).R.\cos\theta.d\theta.dz$$

$$\overrightarrow{F}_{pression}.\overrightarrow{e_x} = -\rho.g.\frac{H^2}{2}$$

Une recherche classique est également celle du point d'application de la force. Ce point, qu'on notera A, ce trouve sous la surface de l'eau à une hauteur z_A et à l'intersection de l'axe Ox avec la surface du barrage.
On recherche alors le moment en O de la force pressante s'exerçant en A :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O\left(\overrightarrow{F}_{pression}(A)\right) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F}_{pression}(A)$$

avec $\overrightarrow{OA} = z_A\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{F}_{pression}(A) = -\rho.g.\frac{H^2}{2}.\overrightarrow{e_x}$ alors :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O\left(\overrightarrow{F}_{pression}(A)\right) = z_A.\rho.g.\frac{H^2}{2}\overrightarrow{e_y}$$

Ce moment est la résultante des moments des actions de pressions sur chaque élément de surface $\overrightarrow{dS}$ soit :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O\left(\overrightarrow{F}_{pression}(A)\right) = \int_0^H z\overrightarrow{e_z} \wedge -\rho.g.(H-z).dz\overrightarrow{e_x} = \rho.g.\left(\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3}\right)\overrightarrow{e_y}$$

En écrivant l'égalité entre les deux expressions du moment de la résultante des actions de pression :

$$z_A.\rho.g.\frac{H^2}{2}\overrightarrow{e_y} = \rho.g.\frac{H^3}{6}\overrightarrow{e_y}$$

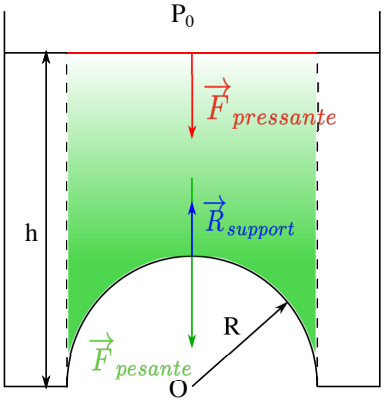
Finalement on trouve :

$$z_A = \frac{H}{3}$$

La résultante des actions de pression s'exerce à une hauteur $\frac{H}{3}$ du fond de l'eau, on trouve plutôt le résultat sous la forme : le point d'application de la résultante des actions de pression se trouve à 2/3 sous la surface de l'eau.

III.2.c Utilisation d'un autre système

On cherche la résultante des actions de pression sur la partie hémisphérique de la bouteille. On étudie l'équilibre de la colonne d'eau au-dessus de la bouteille.
Une façon d'exprimer cette résultante et d'utiliser un autre système que la surface hémisphérique. Système : { colonne d'eau au-dessus du fond}.



Le volume de la colonne d'eau s'exprime : $V = \pi.R^2.h - \frac{2}{3}\pi.R^3$.
Dans le référentielle galiléen terrestre on réalise le bilan des forces s'exerçant sur la colonne d'eau :
i- Poids : $\overrightarrow{F}_{pesante} = \rho.V.\overrightarrow{g}$;
ii- Pression atmosphérique : $\overrightarrow{F}_{atm} = -P_0\pi.R^2\overrightarrow{e_z}$;
iii- Réaction de l'hémisphère : $\overrightarrow{R}_{hémisphère \longrightarrow eau}$.

L'équilibre de la colonne d'eau s'exprime :

$$\overrightarrow{F}_{pesante} + \overrightarrow{F}_{atm} + \overrightarrow{R}_{hémisphère \longrightarrow eau} = \overrightarrow{0}$$

Le principe des actions réciproque donne :

$$\overrightarrow{F}_{pressante}(hémisphère) = -\overrightarrow{R}_{hémisphère \longrightarrow eau}$$

Alors :

$$\overrightarrow{F}_{pressante}(hémisphère) = -(P_0 + \rho.g.h)\pi.R^2\overrightarrow{e_z} + \rho.g\frac{2}{3}\pi.RR^2\overrightarrow{e_z}$$