Travaux dirigés 21

Ecoulement parfait - Ecoulement visqueux

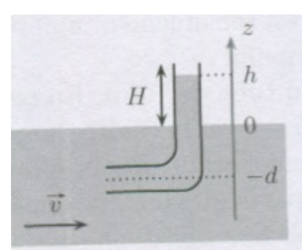
Questions de cours

1. Définir le travail et la puissance indiquée. Donner une expression du travail massique des actions de pression. Que devient cette dernière expression pour un écoulement incompressible ?
2. Pour un système en écoulement stationnaire et dans le cas le plus général possible : exprimer le premier principe de la thermodynamique, exprimer le théorème de l'énergie cinétique, exprimer le théorème de l'énergie mécanique.
3. Donner les hypothèses d'application du théorème de Bernoulli. Traduire ces hypothèses sous forme de relations simples.
4. Déduire des expressions des trois théorèmes précédent l'expression du théorème de Bernoulli.
5. Etablir la loi de conservation de la masse pour un écoulement. Montrer que si l'écoulement est stationnaire alors de débit massique est conservé.
6. Qu'est-ce qu'un écoulement incompressible ? Montrer que le long d'un écoulement incompressible le débit volumique se conserve. Que peut-on en déduire si la section de l'écoulement se resserre ?
7. Définir le taux de cisaillement. Définir la viscosité d'un fluide et donner son unité. Exprimer dans l'hypothèse d'un fluide newtonien, la force surfacique de viscosité.
8. Etablir le profil de vitesse dans un écoulement de Poiseuille cylindrique. En déduire la loi de Hagen-Poiseuille. Représenter ce profil de vitesse.
9. Qu'appelle-t-on perte de charge ? Qu'elles en sont les origines ? Sont-elles de même nature ? Exprimer la variation de la charge le long d'un écoulement en fonction des pertes de charge.
10. Qu'elle est la conséquence de perte de charge sur la vitesse d'un écoulement stationnaire incompressible ? Même question sur la pression ?
11. Etablir l'expression de la variation de la charge le long d'un écoulement en tenant compte des pertes de charge et de la présence d'une ou plusieurs pompes.

Niveau I

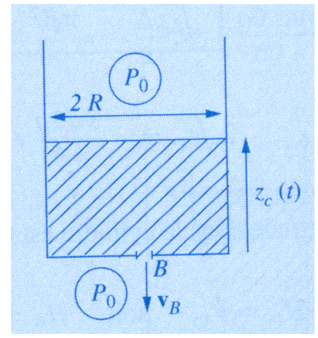
Exercice 1 :◆◆◇**Un débitmètre rudimentaire**

Dans une rivière, le champ de vitesse est horizontal, supposé uniforme prés de la surface ($\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{e_x}$), et l'écoulement de l'eau est considéré comme parfait. On y plonge un tube coudé de section S, qui descend à la profondeur d et qui dépasse d'une hauteur H. L'axe z vertical ascendant a pour origine la surface libre de la rivière.



1. Dans un premier temps, on suppose que l'eau monte dans le tube jusqu'à la hauteur $h < H$ au-dessus de la surface de la rivière. Etablir la relation entre v et h.
2. A partir de quelle vitesse critique v_c d'écoulement de la rivière un jet d'eau peut-il se former au-dessus du tube ? Jusqu'à quelle hauteur h' (au-dessus de la rivière) ce jet monte-t-il ? Quelle est alors la vitesse de l'eau dans le tube ?

Exercice 2 ♦♦♦ : Horloge à eau



Un volume d'eau $V_0 = 80L$ est versé dans un récipient cylindrique de rayon $R = 20cm$; la pression atmosphérique P_0 règne au-dessus de l'eau. On ouvre, à l'instant $t = 0$n un petit orifice B circulaire de section $s = 15mm^2$ au fond du réservoir cylindrique. On admettra que les tubes de champ ont même section s que l'orifice, à la sortie des réservoirs. On donne $g = 9,8m.s^{-2}$

1. Ecrire la loi d'évolution $z_C(t)$, où z_C est la hauteur d'eau dans le réservoir, comptée à partir de B, à l'instant t.

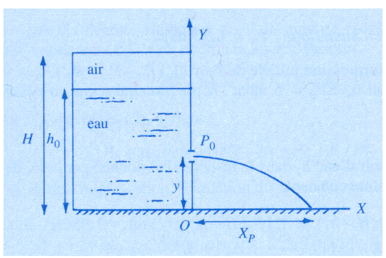
2. Exprimer littéralement la durée T_C de vidange, puis la durée t_C nécessaire pour vider la moitié du récipient cylindrique.

Calculer numériquement T_C et t_C.

Soit un récipient R_0 à symétrie de révolution autour de l'axe Oz, de méridienne d'équation $r = az^n$, où r est le rayon du réservoir aux points de cote z comptée à partir de l'orifice A, de faible section $s = 1cm^2$, percé au fond du réservoir.

3. Déterminer les coefficients constants n et a, pour que la cote du niveau d'eau placé dans R_0 baisse régulièrement de $6cm$ par minute au cours de la vidange.

Exercice 3 ♦♦◊ : Ecoulement



Un grand réservoir cylindrique fermé, de hauteur $H = 2,5\ m$, contient initialement de l'eau de masse volumique constante ρ sur une hauteur $h_0 = 1,80\ m$ surmonté d'air à la pression initiale : $1,10.P_0$, P_0 étant le pression atmosphérique à l'extérieur du réservoir.

On perce la surface latérale d'un petit orifice circulaire de rayon $r \ll R$ et situé à la distance $y = 0,40\ m$ du fond du réservoir. Le système est maintenu à température constante.

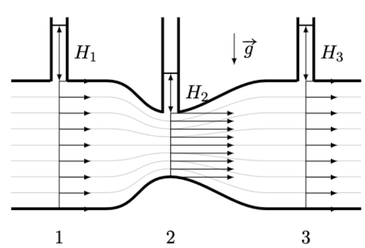
1. Calculer la vitesse v_0 d'éjection initiale de l'eau par l'orifice.

2. Pendant l'écoulement de l'eau, l'air au-dessus de l'eau détend. Calculer la vitesse d'éjection v_1 de l'eau lorsque la surpression de l'air par rapport à P_0 est réduite de moitié.

3. Déterminer l'équation du second degré en h, où h désigne la hauteur d'eau qui reste dans le réservoir au moment où l'eau cesse de s'écouler. Calculer h.

4. Quelle aurait dû être la cote $y = y_0$ du trou pour que la porté $OP = X_P$ du jet d'eau initial soit maximale ? Calculer cette portée maximale et la vitesse d'éjection v_0 correspondante.

Exercice 4 ♦♦♦ : Phénomène de Venturi



Soit une conduite horizontale de section S variable, alimenté en fluide incompressible de masse volumique $\mu = \mu_0$ par un débit massique D_m. On suppose que le profil de vitesse dans toute section perpendiculaire à l'axe de la conduite est uniforme, de sorte que la pression est également uniforme sur chaque section. La conduite a la forme de la figure ci-contre.

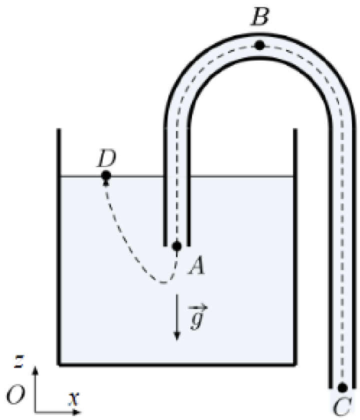
1. Etablir l'expression de la pression p_i qui règne dans la section i en fonction de p_0, μ_0, g et H.

2. On note $\Delta H = H_1 - H_2$, relier la pression p_1 à p_2, ΔH, μ_0 et g.

3. Etablir une première expression de v_2 en fonction de v_1 et de ΔH et g.

4. en déduire une expression du ratio $\dfrac{S_1}{S_2}$

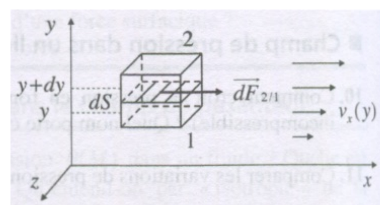
Exercice 5 ♦♦♦ : Phénomène de Venturi



On se propose de vider partiellement un réservoir parallélépidpédique contenant un liquide de masse volumique uniforme μ_0 au moyen d'un siphon, c'est-à-dire d'un tube coudé de section cosntante s. On note Z la section du réservoir.
Soient A le point d'entrée du siphon, B le point le plus haut du siphon, C la sortie du siphon et D un point de la surface libre dans le réservoir.
On note z_i avec $i \in \{A, B, C, D\}$ les coordonnées des points correspondants.
La surface libre du réservoir et l'extrémité du siphon sont en contact avec l'atmosphère à pression P_0.
1. Quelles sont les conditions d'application du théorème de Bernoulli ?
2. Considérant que $s \ll S$, que peut-on dire de al vitesse au point C ?
3. Exprimer la vitesse du fluide à la sortie du siphon. En déduire une condition pour que le fluide s'écoule.
4. Exprimer les pressions P_A et P_B dans le fluide aux points A et B. Que faut-il faire pour amorcer le siphon ? La hauteur du point B peut-elle être quelconque ?
5. On définit à présent $h(t) = z_D(t) - z_C$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $h(t)$.
6. En combien de temps le système se désamorce-t-il ? Quel volume a alors été extrait ?

Données : $z_A = 5\,\text{cm}$; $z_B = 70\,\text{cm}$; $z_C = -10\,\text{cm}$; $z_D(t=0) = 60\,\text{cm}$; $\mu_0 = 1000\,\text{kg.m}^{-3}$; $S = 1\,\text{m}^2$ et $s = 1\,\text{cm}^2$.

Exercice 6 ♦♦♦ : Viscosité et fluide parfait



1. Dans un fluide de viscosité dynamique η en écoulement laminaire de vitesse $\vec{v} = v_x(y)\vec{e_x}$, quelle est l'expression de la force $d\vec{F}_{2/1}$ qu'exerce l'élément de fluide 2 sur l'élément de fluide 1 à travers la surface dS ?Quelle conséquence énergétique peut-on prévoir ?
2. Quelle conditions aux limites faut-il traduire lorsqu'un fluide visqueux est en contact avec une paroi solide ou un obstacle ? Montrer qualitativement pourquoi un fluide visqueux exerce alors une force sur cette paroi ou cet obstacle.
3. Quelles conditions aux limites faut-il traduire sur la vitesse d'un fluide parfait en contact avec un obstacle ou une paroi, sur la pression le long d'une surface libre ? Par quel profil de vitesse se caractérise son écoulement permanent dans une section droite de canalisation ?

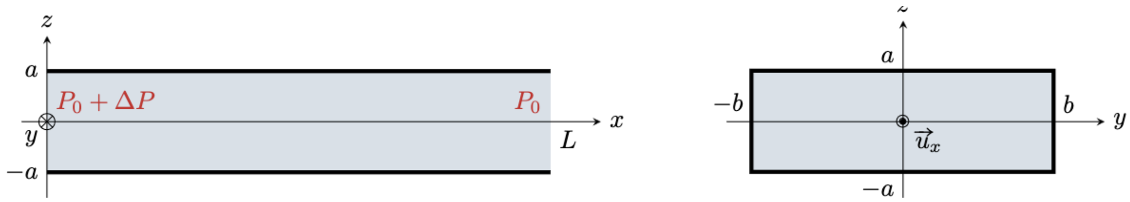
Exercice 7 ♦♦♦ : Loi de Poiseuille et circulation sanguine

Un fluide incompressible de masse volumique ρ et de viscosité η s'écoule dans un conduit cylindrique horizontal d'axe (Ox) et de rayon R. L'axe Oz est vertical ascendant.
La loi de Poiseuille donne le débit volumique D_v en fonction de η, R et de la perte de charge ΔP sur une longueur L : $D_v = \dfrac{\pi}{8\eta}\dfrac{\Delta P}{L}R^4$.
1. Déterminer la vitesse débitante (ou moyenne) v_d de l'écoulement du sang dans un capillaire où $\eta = 4,5.10^{-3}$ Pl, $R = 10\,\mu\text{m}$, $L = 1\,\text{mm}$ et $\Delta P = 10^3\,\text{Pa}$. Sachant que la masse volumique du sang est $\rho = 1,05.10^3\,\text{kg.m}^3$, quelle est la nature de l'écoulement en prenant comme nombre de Reynolds critique $Re_c = 2000$?
2. La vitesse débitante du sang dans une artère où $R = 1\,\text{cm}$ et $L = 10\,\text{cm}$ st $v_d = 0,5\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. Calculer le débit volumique et la chute de pression régnant dans l'artère. Quelle est la nature de l'écoulement ? Commentaire.
3. Le sang est évacué du coeur d'abord au niveau de l'aorte, qui se divise en N_a artères de rayon R_a, puis en N_a' capillaires de rayon $R_c = 10\,\mu\text{m}$. On suppose l'écoulement stationnaire.
Calculer le nombre N_a'.
4. Quelles hypothèses du modèle semblent les plus critiquables ?

Exercice 8 ♦♦♦ : Ecoulement de Poiseuille plan

Considérons un fluide en écoulement au travers d'une fine conduite rectangulaire, de hauteur $2a$ selon (Oz), de largeur $2b \gg 2a$ selon (Oy) et de longueur $L \gg 2a, 2b$ selon (Ox). Un surpression ΔP est imposée en $x = 0$, ce qui entraîne un écoulement de fluie. Suffisamment loin de l'entrée de la cananlisation, le champ de vitesse de l'écoulment est donné par :

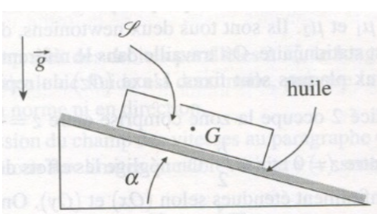
$$\overrightarrow{v} = V_{max}\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)\overrightarrow{e_x}$$



1. Représenter l'allure du champ de vitesse. Indiquer les lignes de courant.
2. L'écoulement considéré est-il parfait ou visqueux ?
3. L'écoulement est-il compressible ? Tourbillonnaire ?
4. Calculer le débit volumique au travers d'une section droite de la conduite. En déduire la vitesse débitante.
5. Montrer que la résultante des forces de viscosité exercées par le fluide sur la conduite vaut :

$$\overrightarrow{F} = \frac{3\eta L}{a^2} D_v \overrightarrow{e_x}$$

Exercice 9 ♦◇◇ : Lubrification



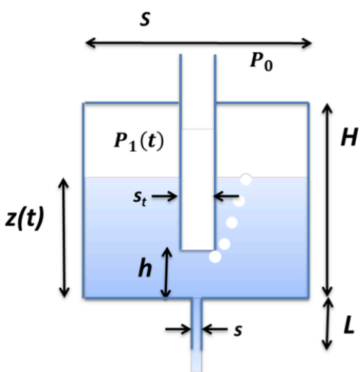
Le solide parallélépipédique $\mathcal{S}$ de masse M, et de centre d'inertie G glisse sur un plan incliné à vitesse constante v_0, sous l'effet de son poids. Son glissement est facilité par une couche d'huile d'épaisseur constante e qui recouvre le plan incliné. L'huile est un fluide visqueux de viscosité $\eta = 1$ Pl, incompressible. On néglige l'effet de la pesanteur sur l'huile.
1. On étudie dans un premier temps la couche d'huile située sous le pavé.
1-a. Justifier qualitativement que la vitesse d'une particule fluide située sous le pavé est une fonction $\overrightarrow{v} = v(y)\overrightarrow{e_x}$.
1-b. Après avoir tracé les lignes de champ du champ de vitesse sous la pavé, montrer que l'accélération de la particule fluide est nulle.
1-c. Etablir le champ des vitesses. On fera l'approximation supplémentaire d'absence de gradient de pression dans l'huile le long de la pente du plan incliné.
1-d. Exprimer alors la force $\overrightarrow{F}_h$ exercée par l'huile sur la pavé, on note S la surface du pavé en contact avec l'huile.

2. On étudie désormais les actions qui agissent sur le pavé.
2-a. Effectuer un bilan des actions mécaniques sur le pavé.
2-b. Déduire la vitesse v_0 en fonctions des divers paramètres du problème.

3. Critiquer le modèle proposé.

Niveau II

Exercice 10 ♦♦♦ : Le vase de Mariotte



Le vase de Mariotte est un réservoir de section supérieur S, de hauteur H et d'évacuation s (avec $s \ll S$). Un tube ouvert sur ses deux extrémités de section s_t pénètre ce réservoir. Pendant la vidange, la pression d'air enfermée dans le réservoir P_1 varie. On fera l'hypothèse qu'à chaque instant l'écoulement peut être considéré stationnaire même si l'interface air/eau se déplace à l'intérieur du réservoir.

On considère dans un premier temps que $z(t) > h$.

1. Rappeler les conditions d'application de l'équation de Bernoulli.
2. En appliquant convenablement cette équation à ce système, exprimer la vitesse débitante v_s de l'eau en sortie du réservoir. Tracer sur une figure une ligne de courant ainsi que les points d'application considérés. Remarque : cette vitesse de dépend pas de P_1.
3. Que dire de cette vitesse ? quel est l'intérêt d'un tel dispositif ?
4. déduire de cette vitesse l'expression du débit volumique de l'écoulement.
5. Quelle sera alors l'expression de la vitesse v_i de l'interface air/eau à l'intérieur du réservoir.
6. En déduire l'expression de $z(t)$ sachant que $z(0) = H$. Vérifier que cette fonction est de type affine. Calculer également l'expression de la date t_h pour laquelle $z(t_h) = h$.
7. En appliquant à nouveau l'équation de Bernoulli à un instant t entre la surface libre à l'intérieur du réservoir et la sortie du dispositif, donner l'expression de $P_1(t)$.
8. Que dire de l'évolution de cette pression au cours du temps ? Calculer à l'aid de la question précédent ce que vaut cette pression à $t = t_h$. Quel raisonnement vous permet de retrouver directement ce résultat ?

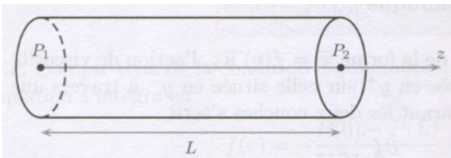
On considère maintenant $z(t) < h$ pour $t > t_h$.

9. Que devient alors la vitesse débitante v_s en sortie du réservoir en fonction de la côte $z(t)$?
10. On peut montrer que dans ce cas, l'expression de la côte $z(t)$ devient :

$$z(t) = \left(\sqrt{h} - \frac{s}{S}\sqrt{\frac{g}{2}(t - t_h)}\right)^2 \tag{1}$$

Donner l'expression de l'instant t_f pour lequel $z(t_f) = 0$.
11. Compléter la figure de la fiche réponse afin d'évaluer l'allure de la courbe représentant la fonction $z(t)$ pour $0 < t < t_f$.

Exercice 11 ♦♦♦ : Ecoulement de Poiseuille dans un tuyau



On considère un tuyau cylindrique, de rayon R, de longueur L, horizontal et parcouru par un liquide newtonien de viscosité dynamique η. La pression sur l'axe du cylindre est P_1 à l'entrée et P_2 à la sortie du tuyau. L'écoulement est permanent et laminaire. On ne tient pas compte de la pesanteur, dont les effets sur le fluide sont compensés par la réaction du tuyau. Dans ce cas, le champ de vitesse est de la forme $\vec{v} = f(r)\vec{e_z}$.

1. Justifier que le champ de vitesse ne dépend que de la variable r.
2. Justifier que la pression est uniforme sur une section droite du tuyau.
3-a. Comment s'adapte la définition de la viscosité dynamique dans le cas de l'écoulement étudié ?
3-b. En raisonnant sur un cylindre de fluide de longueur L et de rayon r, établir une équation liant le champ de vitesse et les pressions en $z = 0$ et $z = L$.
3-c. En déduire le profil de vitesse $f(r)$.
4. En déduire le débit volumique à travers une section du tuyau. En établissant une analogie avec la loi d'Ohm de l'électricité, définir la notion de résistance hydraulique. Exprimer la résistance hydraulique du tuyau en fonction des données.
5. Montrer qu'entre deux point z_1 et $z_2 > z_1$, la perte de charge Δp_c s'exprime dans le cas d'un écoulement laminaire :

$$\frac{\Delta p_c}{L} = \frac{64}{R_e}.\frac{1}{2}\frac{\rho v_d^2}{D}$$

avec R_e le nombre de Reynolds, v_d la vitesse débitante et $L = z_2 - z_1$.
6. A l'aide d'un bilan d'énergie cinétique sur un volume de contrôle entre r et $r + dr$ et de longueur dz montrer que la puissance dissipée le long d'un écoulement de Poiseuille s'exprime :

$$\mathcal{P}_{diss} = R_H.D_v^2$$

avec R_H la résistance hydraulique qu'on exprimera en fonction des données du problème.

Exercice 12 ◆◆◆ : Compressibilité d'un écoulement

On donne le profil de vitesse en coordonnées cylindriques d'un écoulement de Poiseuille dans un cylindre d'axe (Oz), de rayon R et de longueur L :

$$\vec{v}(r) = \frac{R^2}{4\eta}\frac{\Delta p}{M}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\vec{e_z}$$

1. Faire un schéma de la géométrie dans laquelle s'écoule le fluide.
2. Tracer les lignes de courant de cet écoulement.
3. Tracer le profil de vitesse de cet écoulement en $z = 0$, $z = \frac{L}{2}$ et $z = L$.
4. Etablir si cet écoulement est compressible ou incompressible.

On donne le profil de vitesse en coordonnées cartésienne d'un écoulement de Couette entre deux plaques séparées de H

$$\vec{v}(z) = \begin{cases} V_0 \frac{z}{H}\vec{e_x} & \text{si } z \in [0, H] \\ \vec{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

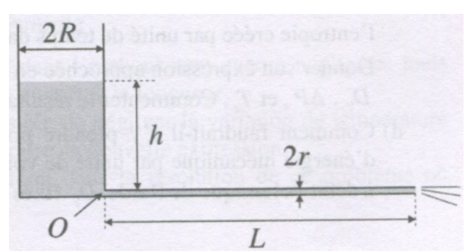
5. Faire un schéma de la géométrie dans laquelle s'écoule le fluide.
6. Tracer les lignes de courant de cet écoulement.
7. Tracer le profil de vitesse de cet écoulement en $x = 0$, $x = \frac{L}{2}$ et $x = L$.
8. Etablir si cet écoulement est compressible ou incompressible.

$$\vec{v}(r,z) = \frac{R^2}{4\eta}\frac{\Delta p}{L}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\left(1 - \frac{z}{L}\right)\vec{e_z}$$

9. Faire un schéma de la géométrie dans laquelle s'écoule le fluide.
10. Tracer les lignes de courant de cet écoulement.
11. Tracer le profil de vitesse de cet écoulement en $z = 0$, $z = \frac{L}{2}$ et $z = L$.
12. Etablir si cet écoulement est compressible ou incompressible.

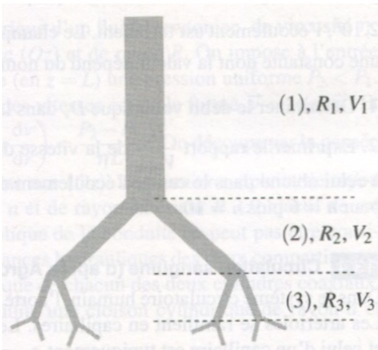
Exercice 13 ◆◆◇ : Viscosimètre à écoulement

Un liquide de masse volumique ρ, et de viscosité cinématique $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ s'écoule lentement (l'écoulement est quasi permanent) d'un récipient cylindrique de rayon R dans un tube horizontal de longueur L et de rayon r.



1. Quelle loi simple faisant intervenir la pression $P(O)$ au point O de jonction entre les deux parties peut-on écrire dans le récipient en considérant le liquide comme pratiquement immobile ?
On rappelle que la loi de Poiseuille valable en régime laminaire dans le tube :

Exercice 14 ♦◇◇ : L'arbre bronchique



Dans un arbre bronchique, les voies respiratoires se divisent par dichotomie avec une réduction systématique de la longueur et du diamètre. Dans le problème, nous allons supposer que la trachée se divise en deux bronches. Chacune d'elles se divise à son tour en deux autres, et ainsi de suite. Nous notons générations les différentes subdivisions qui seront indicées par les nombres successifs, p : la trachée est la génération $p = 1$, les bronches $p = 2$, et ainsi de suite. Nous nous plaçons en régime permanent et l'air est assimilé à un fluide de viscosité η.

Il y a 23 générations de voies aériennes dont les 16 premières sont conductrices. Une bronchiole de génération p est assimilée à un cylindre de rayon r_p et de longueur l_p.

On admet généralement que la loi de Hagen-Poiseuille est valable pour $p < 16$, elle exprime le lien entre le débit volumique et la différence de pression entre les extrémités du tuyau cylindrique :

$$(P_e - P_s) = R_H.D_v \tag{2}$$

avec $R_h = \dfrac{8\eta L}{\pi R^4}$ pour une conduite de rayon R et de longueur L.

La figure représente les quatre premières générations d'un arbre bronchique, à chaque génération chaque dimension longueur et rayon est multipliée par h, constante inférieure à un, identique, pour les deux dimensions.

1. Déterminer le nombre $N(p)$ de bronchioles à la $p^{\text{ième}}$ génération en fonction de p.

2. Déterminer le rayon r_p et la longueur l_p de la bronchiole de génération p en fonction de p, h, r_1 et l_1.

3. Calculer le volume V_p d'un bronchiole de génération p en fonction de V_1, h et p. en déduire le volume total V_{pt} de génération p. On posera $X = 2h^3$.

Montrer que le volume de l'arbre supposé contient n génération est $v_t = V_1\dfrac{1 - X^n}{1 - X}$.

4. Calculer la résistance hydraulique R_p d'un bronchiole de génération p en fonction de R_1 (résistance hydraulique pour $p = 1$) et p. En déduire la résistance hydraulique totale de la génération p. Déterminer la résistance hydraulique total de l'arbre qui contient n générations.

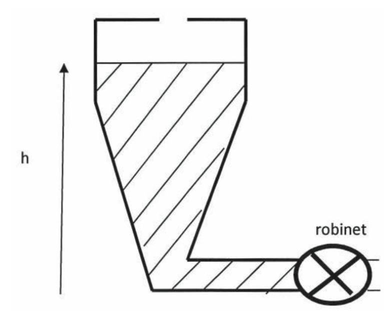
5. Montrer que le volume total diverge quand $n \to \infty$ pour h supérieur à une valeur critique h_c dont on précisera la valeur numérique. A quelle condition sur h la résistance hydraulique diverge-t-elle ?

6. Pour l'homme h a été mesuré, $h = 0,85$. Estimer la variation de pression entre l'entrée et la sortie des 16 premières générations correspondant à une inspiration normale.

Exercice 15 ♦♦♦ : Etude de l'alimentation en eau d'une maison

On considère une alimentation domestique en eau via un château d'eau. Le réservoir a une section $S_0 = 25\,\mathrm{m}^2$ et est ouvert en haut sur l'atmosphère. La hauteur de la surface libre de l'eau par rapport au sol est $h = 20$ m.

Le réservoir débouche sur une canalisation horizontale de section $s = 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$. Celle-ci alimente une installation domestique qui comporte un robinet ouvrant sur l'air atmosphérique via une ouverture de même section s.

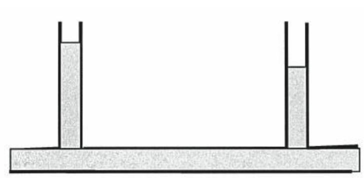


1. Justifier que la vitesse d'écoulement de l'eau au niveau de la surface libre est négligeable devant la vitesse dans la canalisation.

2. Calculer numériquement la vitesse de l'eau en sortie du robinet en négligeant les pertes de charge.

3. Calculer numériquement le débit volumique.

4. Au niveau de la canalisation horizontale il y a une perte de charge. Expliquer ce que cela signifie et en donner des causes. Exprimer alors le théorème de Bernoulli en introduisant une caractéristique des pertes de charge.



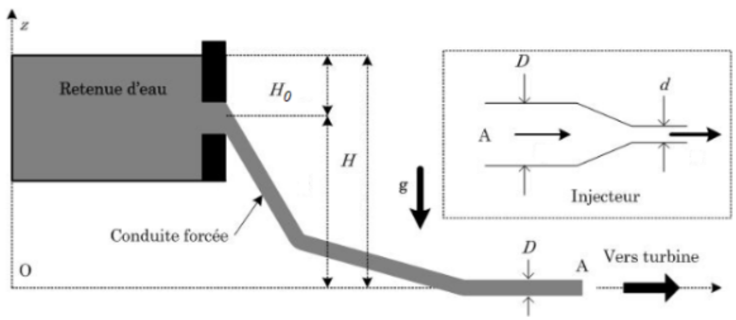
5. Sur la canalisation horizontale on place deux tubes verticaux remplis d'eau séparés de 10 m. On mesure une différence de hauteur de 2 cm entre ces deux tubes.
En déduire la perte de charge due au tuyau d'alimentation.

6. Quelle est désormais la vitesse de l'eau en sortie du robinet situé à 1 km du château d'eau ?

7. On souhaite trouver en sortie la vitesse déterminée à la question 2. Pour cela on installe avant le robinet une pompe. Déterminer la puissance que doit fournir cette pompe.

Exercice 16 : Cavitation dans une conduite forcée

Une conduite gravitaire amène l'eau (assimilé à un fluide parfait incompressible) d'un barrage vers une turbine Pelton où le jet, à l'air libre, frappe les augets de la turbine pour lui donner un mouvement de rotation. La conduite cylindrique, de diamètre constant $D = 30\,\text{cm}$, se terminer horizontalement, son axe étant situé à $H = 160\,\text{m}$ au-dessous de la surface libre de l'eau du barrage. Le départ de la conduite est à $H_0 = 20\,\text{m}$ au-dessous de la surface libre de l'eau supposée de niveau pratiquement constant (barrage de grande capacité). Les frottements, et donc les pertes de charge sont négligées.



Dans les questions 1. et 2., l'injecteur n'est ps encore en place.
1. Calculer l vitesse v_A de l'eau à la sortie de la conduite. Faire l'application numérique.
2. Que peut-on dire du champ des vitesses dans la conduite ? En déduire la loi de pression dans la conduite. En vous basant sur le diagramme (P,T) de l'eau, justifier que l'eau peut changer d'état à température constante.
3. La pression de vapeur saturante de l'eau à la températrre ambiante est $P_{sat} = 3.10^3\,\text{Pa}$. Montrer qu'au-delà d'une certaine altitude, à préciser, le modèle de pression établi précédemment n'est plus applicable. Faire l'application numérique.

Le phénomène qui intervient alors (cavitation) engendre toutes sortes de perturbation (attaque des matériaux, bruits...) et est donc indésirable. Pour s'en affranchir, on visse sur l'extrémité A de la conduite un injecteur (tubulure de section décroissante) de diamètre de sortie $d < D$ et d'axe horizontal.
4. La vitesse d'éjection est-elle modifiée ? Et la vitesse dans la conduite ? Etablir la loi de variation $P'(z)$ dans la conduite et montrer que la cavitation disparait totalement pour $d < d_0$. Calculer d_0.
5. En prenant $d = 15\,\text{cm}$, calculer la vitesse de l'eau à la sortie S et le débit volumique Q_v.
Calculer ensuite la puissance cinétique du jet et montrer qu'elle s'exprime par le produit du débit volumique par un terme appelé pression cinétique que l'on évaluera.

Exercice 17 : Alimentation d'un robinet par un récupérateur d'eau de pluie

Pour lutter contre la diminution des ressources en eau, une solution de plus en plus développée consiste à récupérer l'eau de pluie pendant la période hivernale, la stocker dans une cuve de récupération, et l'utiliser par exemple pour alimenter les chasses d'eau ou les robinets extérieurs. On dispose d'un récupérateur d'eau de pluie relié à un robinet extérieur par une conduite en PVC de diamètre $D = 15\,\mathrm{mm}$ et de longueur $L = 30\,\mathrm{m}$. Le robinet est situé à $h_1 = 1\,\mathrm{m}$ au dessus du sol. L'installation est équipée d'une pompe qui permet de garantir un débit suffisant pour remplir un arrosoir de $15\,\mathrm{L}$ en $30\,\mathrm{s}$. La cuve de récupération est enterrée dans le sol, sa sortie se trouvant à une profondeur $h_2 = 2,50\,\mathrm{m}$. Le niveau d'eau dans la cuve est égal à $H = 1,5\,\mathrm{m}$, le dessus de la cuve se trouvant à pression atmosphérique grâce à un regard.
On tient compte d'une perte de charge régulière dans la conduite, donnée par la relation de Darcy-Weisbach.

$$\Delta p = \lambda \frac{\mu.L.V^2}{2D}$$

Le coefficient de perte de charge λ dépend à la fois du nombre de Reynolds de l'écoulement et des rugosités, qui sont pour le PVC de hauteur caractéristique $e = 1,5\,\mu\mathrm{m}$.
1. Calculer la vitesse débitante V dans la conduite et le nombre de Reynolds de l'écoulement.
?.2 En utilisant l'abaque, donnée en fin de TD, déterminer le coefficient de perte de charge λ puis la valeur numérique de la chute de pression Δp.
3. En déduire la puissance indiquée que la pompe doit fournir à l'eau pour maintenir le débit.
4. La pompe a un rendement de 60%, en déduire la puissance électrique consommée lorsque le robinet est ouvert.
5. Les valeurs obtenues ici sont en fait sous-estimées. Quel phénomène négligé ici permet de l'expliquer ?

Données : masse volumique $\mu = 1,0.10^3\,\mathrm{kg.\,m^{-3}}$; viscosité $\eta = 1,0.10^{-3}$ Pl.

Exercice 18 : Transport d'huile alimentaire

Dans une usine agro-alimentaire, de l'huile de masse volumique ? = 865 kg · m ?3 doit être transportée avec un débit $q = 20\,\mathrm{m^3.\,h^{-1}}$ dans une conduite longue de $20\,\mathrm{m}$ et de diamètre $d = 10\,\mathrm{cm}$. L'écoulement dans la conduite est laminaire.
Données : perte de charge linéaire : dans un écoulement laminaire :

$$\Delta P_{lin} = \frac{1}{2d}\lambda\rho u^2 \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{64}{R_e}$$

où R_e est le nombre de Reynolds de l'écoulement et u la vitesse débitante.
perte de charge singulière :

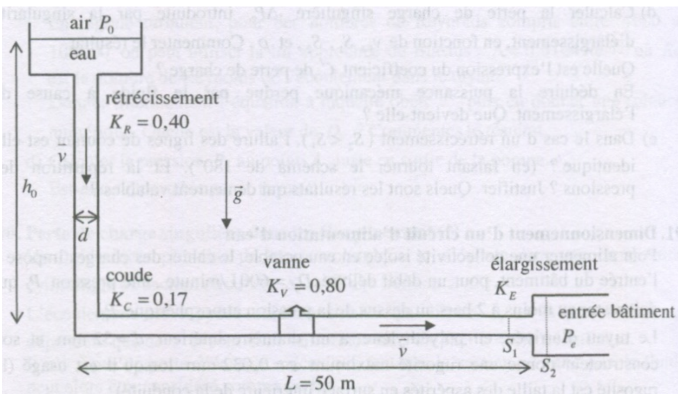
$$\Delta P_s = \frac{1}{2}\kappa\rho u^2$$

1. Lorsque la conduite est parfaitement horizontale, on mesure une chute de pression de $15,0\,\mathrm{m}$ bar. En déduire la viscosité de l'huile.
2. Vérifier a posteriori que l'écoulement dans la conduite est bien laminaire.
3. Au sein de la conduite se trouve un robinet vanne, responsable d'une perte de charge singulière de coefficient $\kappa = 2,8$ lorsqu'il est ouvert. Calculer la chute de pression prenant en compte ce robinet.
4. Déterminer la longueur de conduite équivalente à la présence du robinet.
5. La conduite doit délivrer l'huile à une hauteur $3\,\mathrm{m}$ supérieure à celle de départ. Calculer la chute de pression totale.
6. En déduire la puissance nécessaire au transport de l'huile le long de la conduite sans chute de pression.

Exercice 19 ♦♦♦ : Dimensionnement d'un circuit d'alimentation d'eau

Pour alimenter une collectivité isolée en eau potable, le cahier des charges impose à l'entrée du bâtiment, pour un débit délivré $D_v = 600\,\mathrm{L.\,min^{-1}}$, une pression P_e qui doit rester au moins à 2 bars au dessus de la pression atmosphérique P_0.
Le tuyau d'arrivé, en polyéthylène, a un diamètre intérieur $d = 32\,\mathrm{mm}$ et son constructeur donne une rugosité maximum $\epsilon = 0,032\,\mathrm{mm}$ lorsqu'il est usagé (la rugosité est la taille des aspérités en surface intérieure de la conduite). La masse volumique de l'eau est notée ρ et sa viscosité vaut $\eta = 1,0.10^{-3}$ Pl, $g = 9,8\,\mathrm{m.\,s^{-1}}$.
Le diagramme de Moody est fourni pour le calcul des pertes de charge régulières.

I- Utilisation du réservoir type "château d'eau"

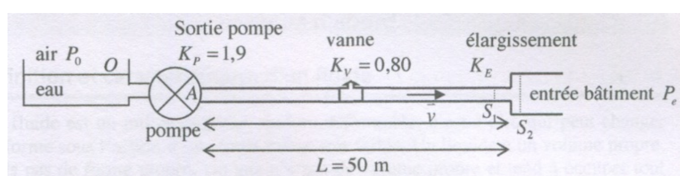


L'ingénieur chargé du projet a l'idée de placer un reservoir en hauteur pour répondre au cahier des charges, suivant le schéma ci-contre.
La hauteur h_0 est maintenue constante par apport extérieur. Le tuyau est partout identique, et l'installation comprend aussi un rétrécissement, un coude, et une vanne ouverte, dont les coefficients de perte de charge singulière sont donnés.
Une singularité de coefficient K créée une perte de charge $\Delta P_S = \frac{1}{2}K\rho v^2$ où v est la norme de la vitesse débitante (ou moyenne) du fluide dans le tuyau.
En fin de parcours se trouve enfin un élargissement dont le coefficient de perte de charge singulière s'écrit : $K_E = \left(1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)\right)^2$.

1. Pourquoi est-il nécessaire de maintenir une pression d'eau suffisante à l'entrée du bâtiment ?
2. Dans le cas le plus contraignant du cahier des charges, calculer numériquement la vitesse v, le nombre de Reynolds de l'écoulement dans le tuyau $Re = \frac{\rho v d}{\eta}$, et en déduire le coefficient de perte de charge régulière Λ défini par la formule de Darcy : $\Delta P = \Lambda \frac{\rho L v^2}{2d}$.
3. Exprimer la perte de charge totale en fonction des données, de v, et de Λ. En déduire la hauteur minimale h_0, et faire l'application numérique. Commenter.

II- Utilisation d'une pompe

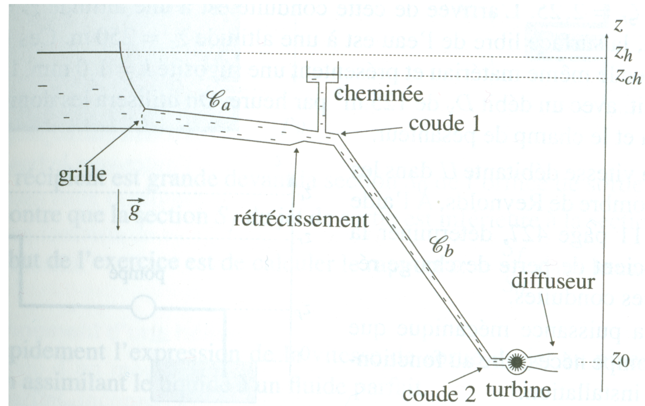
L'ingénieur propose maintenant d'utiliser une pompe située dans un local technique à distance du bâtiment, suivant le schéma précédent.
Les autres caractéristiques sont inchangées. La pompe est supposée être dimensionnée par pouvoir obtenir un fonctionnement avec le débit D_v et la pression P_e à l'entrée du bâtiment à la limit'e du cahier des charges.



1. Dans ces conditions, exprimer et calculer numériquement la perte de charge totale depuis la pompe (en tenant compte de K_p).
2. Quelle est l'énergie par unité de volume du fluide B_A au point A juste avant la sortie de la pompe ?
En déduire la puissance mécanique développée par la pompe.
3. Définir et calculer le rendement en puissance de l'installation. Que devient la puissance perdue ?
4. Quelle précaution faut-il prendre à la fermeture de la vanne ou lorsque la consommation d'eau dans le bâtiment est stoppée ?

Exercice 20 ♦♦♦ : Microcentrale hydraulique

On considère une microcentrale constituée d'une retenue d'eau, d'une première conduite, $\mathcal{C}_a$, peu inclinée, d'une cheminée d'équilibre, d'une seconde conduite, $\mathcal{C}_b$, très inclinée, puis d'une turbine.



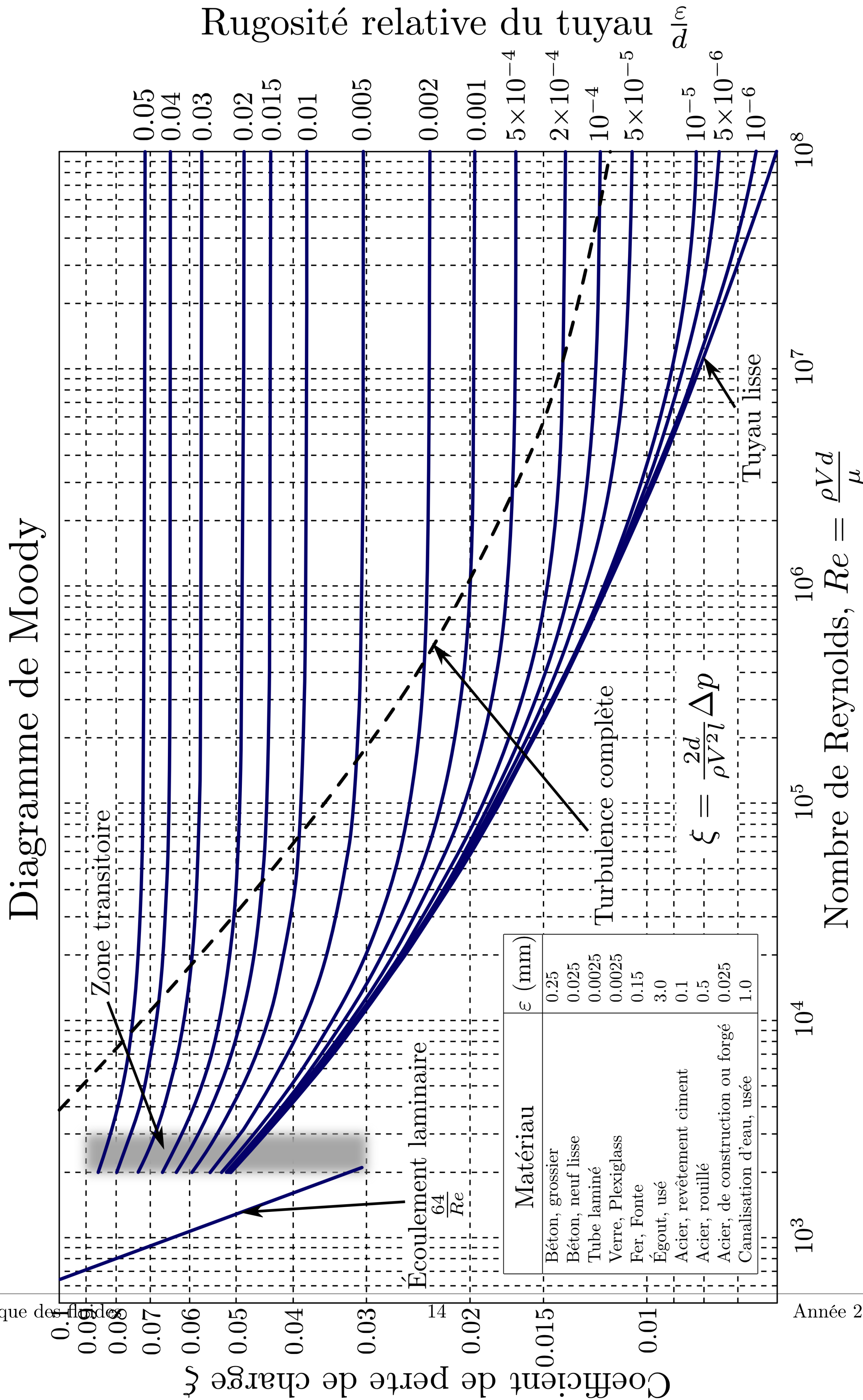
On note P_0 la pression atmosphérique, aussi bien au niveau de la retenue d'eau qu'au niveau de la sortie de la turbine. La conduite $\mathcal{C}_a$ est de longueur $L_a = 60m$, de diamètre intérieur $D_a = 0,30m$, et l'eau y a une vitesse uniforme $v_a = 1,2m.s^{-1}$. La conduite $\mathcal{C}_b$ est de longueur $L_b = 87m$, de diamètre intérieur $D_b = 0,20m$ et l'eau y a une vitesse uniforme $v_b = 2,7m.s^{-1}$. On rappelle que le coefficient de perte de charge singulière est défini par $\dfrac{2\Delta P_{tot}}{\rho v^2}$. Pour la grille ce coefficient vaut $\zeta_g = 1,75$, pour le rétrécissement $\zeta_r = 0,079$ (ramenée à la vitesse v_b).
Pour les deux coudes $\zeta_1 = 0,47$ et $\zeta_2 = 0,55$. La sortie de la turbine comporte un diffuseur. Son diamètre d'entrée est D_b et son diamètre de sortie $D_d = 0,3m$. Son coefficient de perte de charge singulière ramené à la petite section est $\zeta_d = 0,18$. On donne la différence d'altitude entre la retenue d'eau et la turbine : $z_h - z_0 = 89m$. On prend pour l'eau $\eta = 1,0.10^{-3}\ Pl$.

1. Déterminer le débit volumique d'eau D_v dans les conduites. Peut-on utiliser la loi de Hagen-Poiseuille ? On prendra pour la suite pour les deux conduites les coefficients de pertes de charges régulière $\lambda_a = 15.10^{-3}$ et $\lambda_b = 16.10^{-3}$. On rappelle que le coefficient de perte de charge régulière est défini par $\lambda = \dfrac{2D\Delta P_{tot}}{\rho L v^2}$.

2. Compte tenu des différentes données, déterminer l'altitude z_{ch} de l'eau dans la cheminée.

3. La turbine a un rendement $n = 0,82$. Déterminer la puissance mécanique récupérable sur son arbre.

4. Quel est le rôle du diffuseur ?



Matériau	ε (mm)
Béton, grossier	0.25
Béton, neuf lisse	0.025
Tube laminé	0.0025
Verre, Plexiglass	0.0025
Fer, Fonte	0.15
Égout, usé	3.0
Acier, revêtement ciment	0.1
Acier, rouillé	0.5
Acier, de construction ou forgé	0.025
Canalisation d'eau, usée	1.0