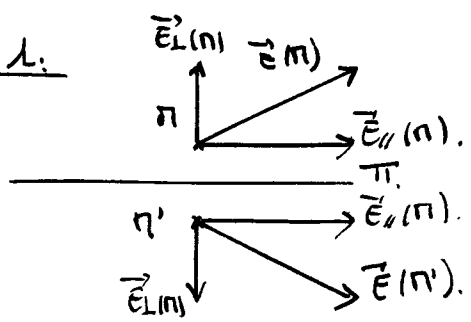
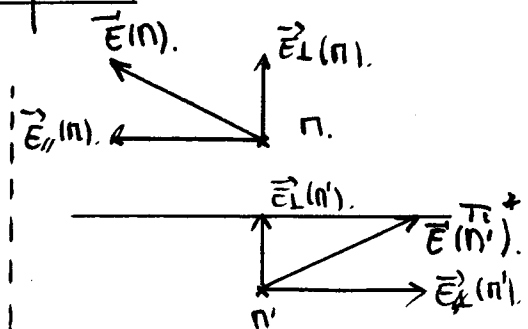
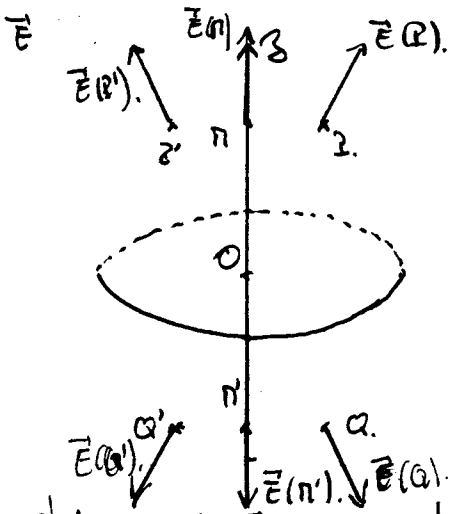
TD n° 4 : Electrostatique.

Exercice 1 :





* Même symétrie de la distribution et du champ



* Π' symétrique de Π par rapport au plan de la spire. Alors $\vec{E}(\Pi') = -\vec{E}(\Pi)$ puisque que $\vec{E}(\Pi) \perp (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

* $\mathcal{Q}'$ symétrique de $\mathcal{Q}$ par rapport à l'axe. Or le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie de la distribution. Donc $\vec{E}(\mathcal{Q}')$ symétrique de $\vec{E}(\mathcal{Q})$.

* $\mathcal{Q}$ symétrique de $\mathcal{I}$ par rapport au plan de la spire. Alors $\vec{E}(\mathcal{Q})$ symétrique de $\vec{E}(\mathcal{I})$.

* Le point O appartient à l'axe z et et $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie. Donc $\vec{E}(O)$ est contenu dans ce plan.

$(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est un plan de symétrie, donc $\vec{E}(O) \in (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$; donc $\vec{E}(O)$ appartient à un ensemble de plan.

$\Rightarrow$ $\vec{E}(O) // \vec{e}_z$ et $\vec{E}(O) \perp \vec{e}_z \Rightarrow \vec{E}(O) = \vec{0}$.

* Pour trouver $\vec{E}(\Pi')$:

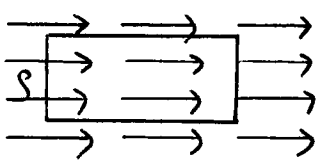
- $\vec{E}_{//}(\Pi)$ et $\vec{E}_\perp(\Pi)$ sont respectivement les composantes de $\vec{E}(\Pi)$ parallèle et orthogonal au plan Π^*.

- Trouver les symétriques par rapport à Π^* de $\vec{E}_{//}(\Pi)$ et $\vec{E}_\perp(\Pi)$ affecté d'un signe $\ominus$.

En déduire $\vec{E}(\Pi')$ comme la somme $\vec{E}_\perp(\Pi') + \vec{E}_{//}(\Pi')$.

Exercice 2 :

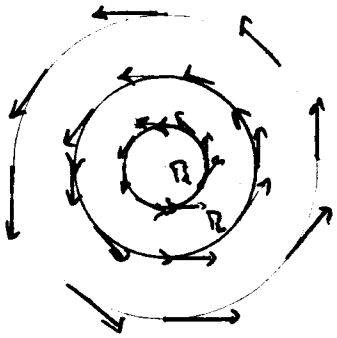
Pour les schémas de gauche : (a) :



champ uniforme à circulation conservative.

Il peut s'agir d'un champ $\vec{E}$ observé loin des sources. En effet flux nul à travers toutes surface fermée.

(b) :



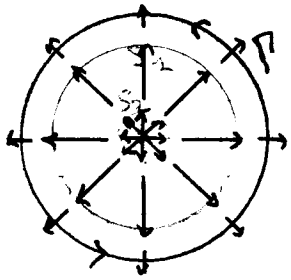
• Le long des contours Γ_1 et Γ_2 fermé la circulation de $\vec{E}$ est non nulle.

$\boxed{\mathcal{C}_2 = \oint_{\Gamma_2} \vec{E}\cdot d\vec{l} > 0}$ et $\boxed{\mathcal{C}_1 = \oint_{\Gamma_1} \vec{E}\cdot d\vec{l} > 0}$.

Or le potentiel décroît le long des lignes de champs, les lignes de champ $\vec{E}$ ne peuvent se fermer sur elles même.

(b) n'est pas un champ $\vec{E}$.

(c)



• La circulation de $\vec{E}$ le long de Γ : $\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} \vec{E}\cdot d\vec{l}$

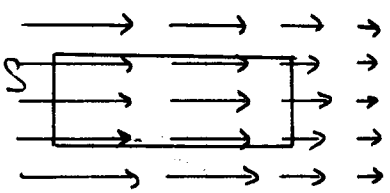
Car $\vec{E} \perp d\vec{l} \Rightarrow \mathcal{C} = 0$. Ce champ correspond à un champ électrostatique.

• Le flux du champ $\vec{E}$ à travers S_1 $\boxed{\Phi_1 = \oiint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S_1}}$ est plus grand que $\boxed{\Phi_2 = \oiint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S_2}}$.

Et $\Phi_1 > 0$; $\Phi_2 > 0$. Dans les deux surfaces il y a présence de charges positives.

De plus $\Phi_1 > \Phi_2$. il y a des charges entre les deux surfaces S_1 et S_2.

(d) :



• Flux à travers S négatif : flux sortant plus petit que le flux entrant.

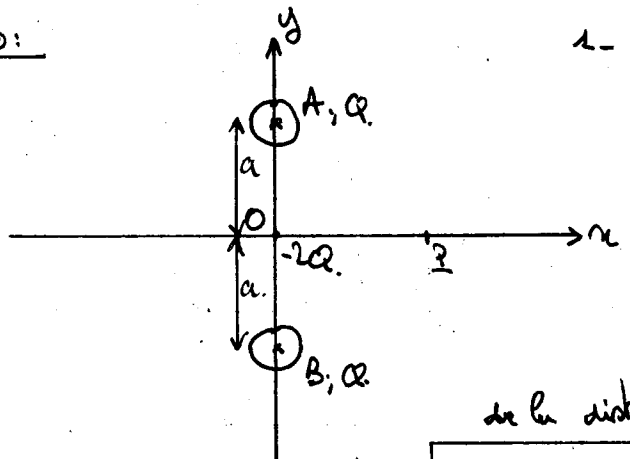
• La circulation est nulle.

Donc il s'agit d'un champ $\vec{E}$, des charges négatives sont contenues dans le surface volume enserré par S.

Pour les schémas du bas : Même résultats pour (a) ; (b) et (d), (c) et (f).

Champ (e) à circulation non nulle. Ce n'est pas un champ électrostatique.

Exercice 3 :



1 – • $\vec{E}(P) = E(x)\,\vec{u}$. Base d'étude cartésienne $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

• Étude de symétrie :

• $(P, \vec{e_x}, \vec{e_z})$ est un plan de symétrie.

• $(P, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ est un plan de symétrie de la distribution puisqu'elle est contenue dedans.

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(P) = \vec{E}(x)\,\vec{e_x} \Rightarrow \vec{u} = \vec{e_x}.}$

2- Le plan $(O, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ est plan de symétrie de la distribution. Donc plan de ③ symétrie de $\vec{E}$.

Soit Σ' symétrique de Σ par rapport à $(O, \vec{e_y}, \vec{e_z})$. Alors comme $\vec{E}(\Sigma)$ est orthogonal à ce plan, $\boxed{\vec{E}(\Sigma') = -\vec{E}(\Sigma).}$

Donc $E(-x)\vec{e_x} = -E(x)\vec{e_x}$

$E(-x) = -E(x)$ La fonction $E(x)$ est impaire.

3- On utilise le théorème de superposition.

$$\boxed{\vec{E}(\Sigma) = \vec{E}_A(\Sigma) + \vec{E}_O(\Sigma) + \vec{E}_B(\Sigma).}$$

- $\vec{E}_A(\Sigma) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{A\Sigma^3}\vec{A\Sigma}$; $\vec{E}_B(\Sigma) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{B\Sigma^3}\vec{B\Sigma}$; $\vec{E}_O(\Sigma) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-2Q)}{O\Sigma^3}\vec{O\Sigma}$.

$\boxed{A\Sigma = B\Sigma = \sqrt{a^2 + x^2}}$ et $\boxed{O\Sigma = x}$.

De plus $\vec{A\Sigma} + \vec{B\Sigma} = \vec{AO} + \vec{O\Sigma} + \vec{BO} + \vec{O\Sigma}$ et $\vec{AO} = \vec{OB} \Rightarrow \vec{AO} + \vec{BO} = \vec{0}$.

$= 2\vec{O\Sigma} = 2x\vec{e_x}$.

$$\Rightarrow \vec{E}(\Sigma) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(a^2+x^2)^{3/2}}}\,2x\vec{e_x} - \frac{2Qx}{4\pi\varepsilon_0 x^3}\vec{e_x}.$$

$$\boxed{\vec{E}(x) = \frac{2Qx}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^3}\right)\vec{e_x}.}$$

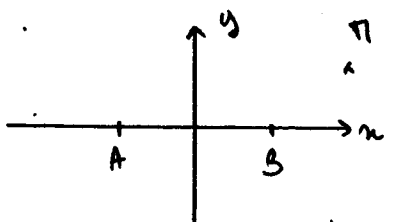
Exercice 4:

1- Les lignes de champ sortent au point $A(-1, 0)$, $\underline{q_A > 0}$.

Les lignes de champ arrivent au point $B(1; 0)$; $\underline{q_B < 0}$.

2- La forme des équipotentielles nous renseigne sur le fait que $\underline{|q_A| > |q_B|}$.

3- $\left|\frac{q_A}{q_B}\right| = 2$.



$\left\{\begin{array}{l} A(-1, 0) \ ; \ B(1, 0) \\ M(x_M, y_M). \end{array}\right.$

On utilise le théorème de superposition : $V(M) = V_A(M) + V_B(M)$.

- $\boxed{V_A(M) = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{AM}}$ et $\boxed{V_B(M) = \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{BM}.}$

$\vec{AM} = (x_M - x_A)\vec{e_x} + (y_M - y_A)\vec{e_y}$. $\vec{BM} = (x_M - x_B)\vec{e_x} + (y_M - y_B)\vec{e_y}$.

On trouve l'équation cartésienne de l'équipotentielle $V=0$ en résolvant.

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{AM} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{BM} = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow 4\left\{(x-1)^2 + y^2\right\} = (x+1)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow 4(x-1)^2 - (x+1)^2 + 3y^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 + 3y^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{10}{3}x + y^2 + 1 = 0 \quad \text{or} \quad \boxed{x^2 - \frac{10}{3}x = \left(x - \frac{10}{6}\right)^2 - \frac{100}{36}}.$$

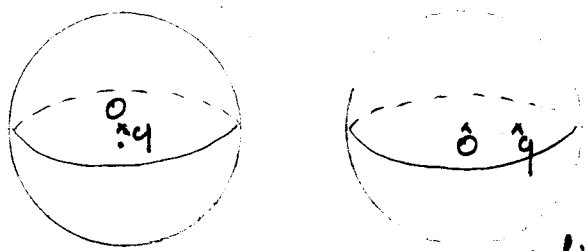
Alors $\left(x - \frac{10}{6}\right)^2 + y^2 - \frac{100}{36} + 1 = 0.$

On obtient donc l'équipotentielle $V=0$ l'équation cartésienne d'un cercle : $\boxed{\left(x - \frac{10}{6}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}}$. Centre du cercle: $\begin{cases} x = \frac{10}{6} \\ y = 0 \end{cases}$

$$\boxed{\text{Rayon } R = \frac{4}{3}.}$$

Exercice 5 :

1-



Dans les deux cas le théorème de Gauss donne. $\oiint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$.

Le flux du champ $\vec{E}$ à travers la sphère n'est pas modifié par déplacement de q dans la sphère.

2. Si le champ $\vec{E}$ est nul sur la surface S fermée : $\oiint \vec{E}.d\vec{S} = \oiint \vec{0}.d\vec{S} = 0.$

3- Si le flux à travers S fermée est nul : $\oiint \vec{E}.d\vec{S} = 0$, cela signifie qu'il y a autant de flux sortant que de flux entrant.

C'est-à-dire pas de source dans la surface : $q_{int} = 0$.

4-i: La distribution est indépendante de toute coordonnées d'espace. Donc le champ $\vec{E}$ est indépendant des coordonnées d'espace. $\vec{E}$ est uniforme.

Tout plan passant par M est plan de symétrie de la distribution, puisqu'elle occupe tout l'espace. $\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$.

4-ii. Ici pour toute surface fermée : $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ puisque $\vec{E} = \vec{0}$.

S contient des charges, puisque ρ est dans tout l'espace. Donc $Q_{int} \neq 0$.

Le théorème de Gauss n'est pas vérifié ici.

Ceci vient du fait de la présence de charges à l'infini. Pour utiliser le théorème de Gauss il faut que le champ décroisse à l'infini.

5- Ligne de champ : tangente en tout point au champ. Soit $d\vec{l}$ le déplacement élémentaire le long de la ligne de champ.

Alors $\vec{E} \wedge d\vec{l} = \vec{0}$. $\Rightarrow \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_y\,dz - E_z\,dy = 0 \\ E_z\,dx - E_x\,dz = 0 \\ E_x\,dy - E_y\,dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}}$$

Dans une base sphérique et cylindrique on procède de même.

$$\begin{vmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} E_\theta\,dz - E_z\,r\,d\theta = 0 \\ E_z\,dr - E_r\,dz = 0 \\ E_r\,r\,d\theta - E_\theta\,dr = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{r\,d\theta}{E_\theta} = \frac{dr}{E_r} = \frac{dz}{E_z}}$$

6-i: La relation entre $\vec{E}$ et V : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$.

Le potentiel est constant en tout point. Or le champ dépend en module de la variation de V. Donc $\vec{E}$ n'est pas le même sur toute l'équipotentielle.

6-ii: Par définition $dV = \overrightarrow{grad}V \cdot d\vec{OM} = -\vec{E} \cdot d\vec{OM}$ avec O et M deux point de l'équipotentielle

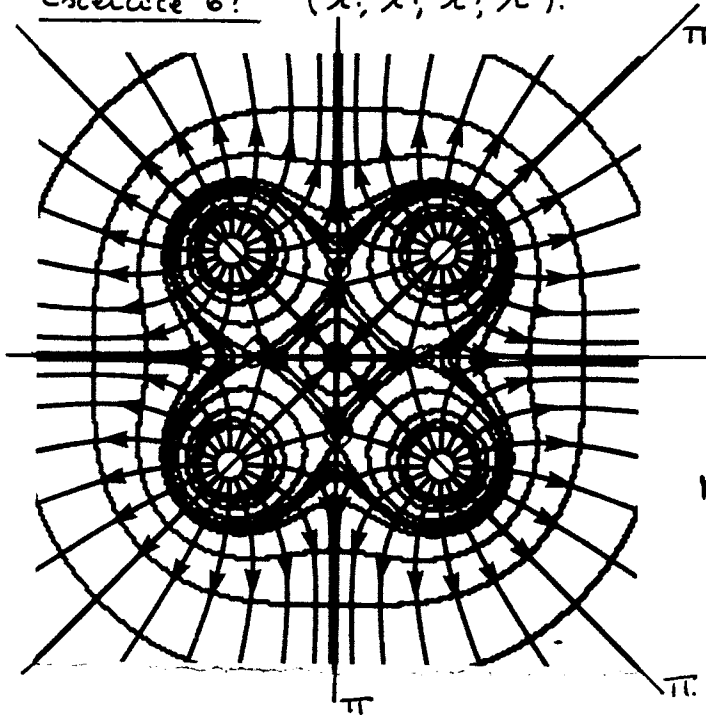
Or $dV = 0$ puisque $V = cte$. $\Rightarrow \underline{\vec{E} \cdot d\vec{OM} = 0}$.

Le champ est orthogonal à l'équipotentielle.

6-iii. Une équipotentielle se recoupe en des points de champ nul. En effet $\vec{E}$ est orthogonal aucun surface équipotentiel.

6-iv: Deux équipotentielles correspondent à 2 valeurs différentes de potentielles. Elles ne peuvent pas se recouper.

Exercice 6: $(1;1;1;1)$.

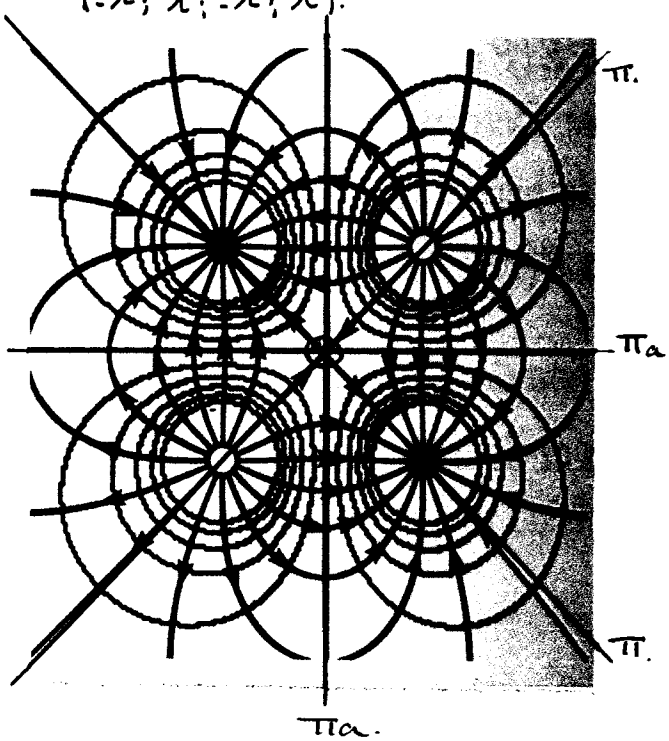


- Les plans π sont des plans de symétrie.
- Le centre est point d'intersection de tous les plans de symétrie. Alors $\vec{E} = \vec{0}$ au centre.
- Les points de champ nul sont localisés à l'intersection de ligne de champ.

Aux lieux de champ nul l'équipotentielle se recoupe.

Zones entourées :

$(-1;1;-1;1)$.

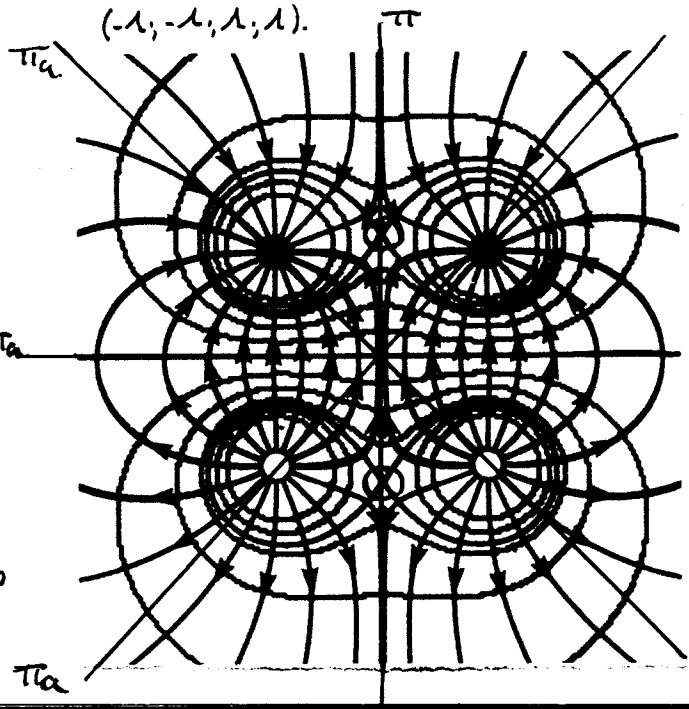


- Le champ est nul uniquement au centre.

Les lignes de champ sont bien contenues dans le plan de symétrie, mais orthogonale aux plans d'anti-symétrie.

Proche des charges les lignes sont radiales et finissent les charges positives au centre sur les charges négatives.

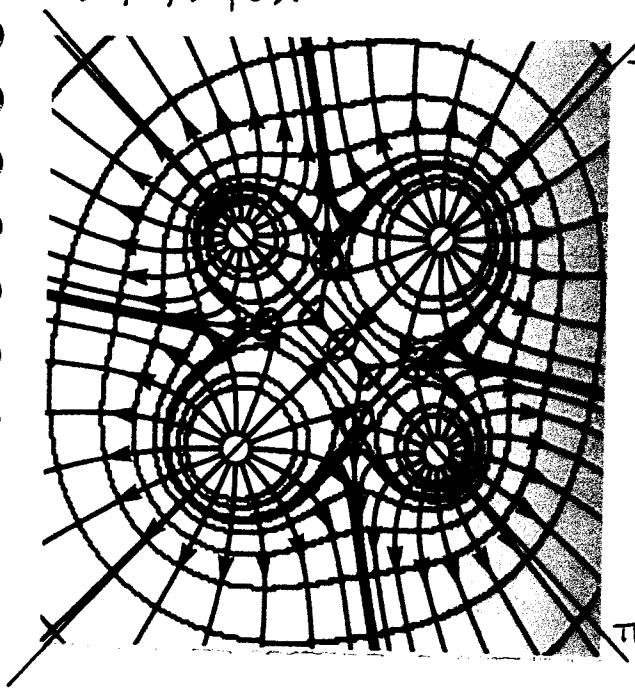
$(-1;-1;1;1)$.



- Les points entourés sont ceux de champ nul, lieux où les équipotentielles πa se recoupent.

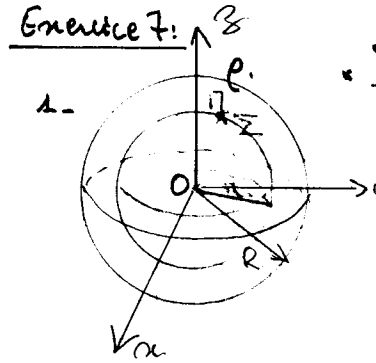
Les 2 plans : $x = y$ et $x = -y$ sont un peu particulier parce qu'ils contiennent des charges. Ils sont localement plan de symétrie.

(1; 2; 1; 2).



* Champ nul au centre. et points de recollement de l'équipotentielle entourés.

Exercice 7:



1- * Symétries. Base d'étude sphérique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$.

- Le plan $(\Pi, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ est plan de symétrie de la distribution.
- Le plan $(\Pi, \vec{e_r}, \vec{e_\varphi})$ est plan de symétrie de la distribution.

$$\vec{E}(M) = E_r(M)\vec{e_r} + E_\theta(M)\vec{e_\theta} + E_\varphi(M)\vec{e_\varphi}.$$

$$= E_r(r, \theta, \varphi)\vec{e_r}.$$

* Invariances :

* Invariance de la distribution par rotation d'angle θ.

* Invariance de la distribution par rotation d'angle φ.

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e_r}.$$

On peut appliquer le théorème de Gauss. Choix d'une surface de Gauss :

Sphère de centre O et de rayon r : Σ.

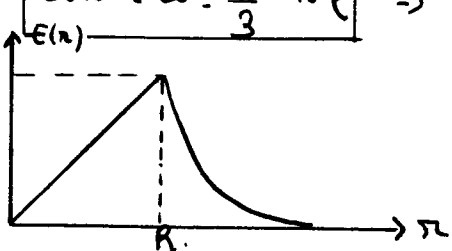
Théorème de Gauss : $\oiint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$.

$d\vec{S} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e_r}$.

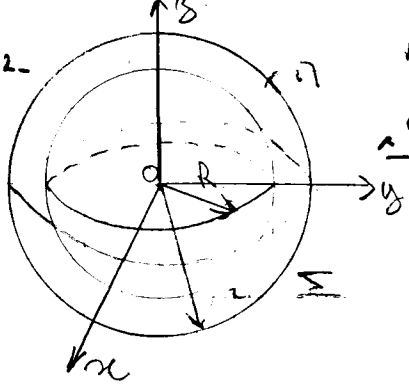
* $\oiint \vec{E}.d\vec{S} = 4\pi r^2 E_r(r)$.

* Si $r < R$. $Q_{int} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ $\Rightarrow E_r(r) = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$ $\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e_r}$.

* Si $r > R$ $Q_{int} = Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ $\Rightarrow E_r(r) = \frac{4/3 \pi R^3 \rho}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$ $\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\rho R^3}{3r^2\varepsilon_0}\vec{e_r}$.



2-



Base d'étude sphérique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$.

« Symétries.. « 2 plan $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ plan de symétrie de la distribution.

« 2 plan $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\varphi})$ plan de symétrie de la distribution.

$\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,\varphi)\vec{e_r} + E_\theta(r,\theta,\varphi)\vec{e_\theta} + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\vec{e_\varphi}$.

$= E_r(r,\theta,\varphi)\vec{e_r}$.

« Invariances: Invariance par rotation d'angle θ.
Invariance par rotation d'angle φ. $\Rightarrow \vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e_r}$.

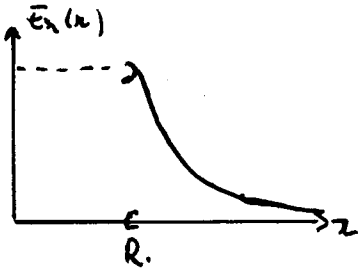
Choix de une surface de Gauss: Surface Σ de rayon r et de centre O.

Théorème de Gauss: $\oiint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$ et $d\vec{S} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e_r}$.

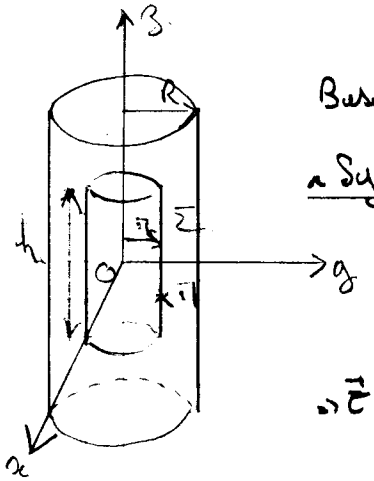
$\oiint \vec{E}.d\vec{S} = 4\pi r^2 E_r(r)$.

« 2 avec $r < R$: $q_{int} = 0$. $\Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{0}$.

« 2 avec $r > R$: $q_{int} = 4\pi R^2 \times \sigma$. $\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$.



3-



Base d'étude cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$.

« Symétries: « 2 plan $(M, \vec{e_r}, \vec{e_z})$ plan de symétrie de la distribution

« 2 plan $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ plan de symétrie de la distribution.

$\Rightarrow \vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\vec{e_r} + E_\theta(r,\theta,z)\vec{e_\theta} + E_z(r,\theta,z)\vec{e_z}$.

$= E_r(r,\theta,z)\vec{e_r}$.

« Invariances: « Invariance par rotation d'angle θ.
« Invariance par translation suivant z. $\Rightarrow \vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e_r}$.

Choix de une surface de Gauss: Surface cylindrique Σ de hauteur h et de rayon r.

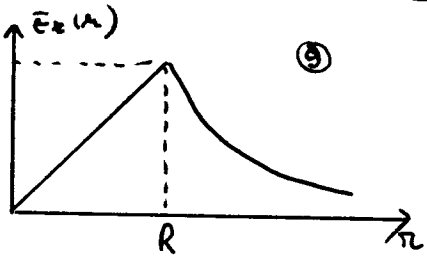
Théorème de Gauss: $\oiint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$ $d\vec{S} = r\,dr\,d\theta\,\vec{e_z} + r\,d\theta\,dz\,\vec{e_r}$.

$\oiint \vec{E}.d\vec{S} = 2\pi r h E_r(r)$.

2 avec $r < R$: $q_{int} = \rho \times \pi r^2 h$

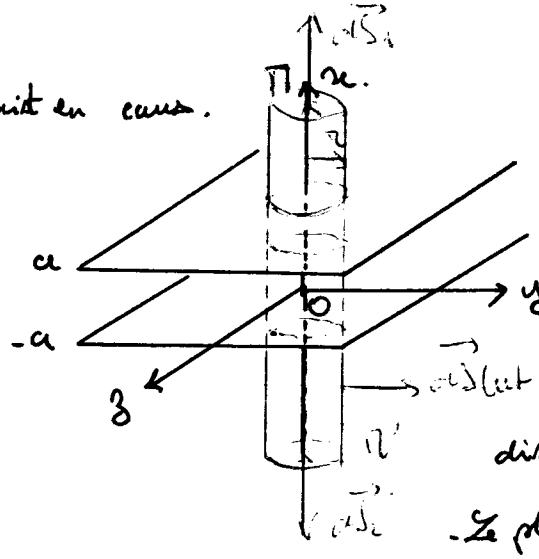
$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{e_r}$.

« Pour $r > R$: $q_{int} = \pi R^2 h \rho \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{e_r}}$



4- Soit en coupe.

5-



Base d'étude cartésienne $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

« Symétrie :

- Le plan $(M, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ est plan de symétrie de la distribution.

- Le plan $(M, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ est plan de symétrie de la distribution

$\Rightarrow \vec{E}(M) = E_x(x,y,z)\vec{e_x} + E_y(x,y,z)\vec{e_y} + E_z(x,y,z)\vec{e_z}$

$\boxed{= E_x(x,y,z)\vec{e_x}}$

« Invariances : La distribution ne dépend que de $x \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = E_x(x)\vec{e_x}}$

« Le plan $(O, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ est également un plan de symétrie de la distribution. Alors $E_x(x)\vec{e_x}$ est symétrique par rapport à $(O, \vec{e_y}, \vec{e_z})$.

Soit M' symétrique de M par rapport à $(O, \vec{e_y}, \vec{e_z}) \Rightarrow \vec{E}(M') = +E(-x)\vec{e_x}$.

$\Rightarrow \boxed{E_x(-x) = -E_x(x)}$ fonction impaire de x.

« Choix d'une surface de Gauss : Cylindre de rayon r de hauteur $\|\overrightarrow{MM'}\|$.

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_{lat}$. Le théorème de Gauss donne :

$$\oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E}.d\vec{S_1} + \iint_{S_2} \vec{E}.d\vec{S_2} + \iint_{S_{lat}} \vec{E}.d\vec{S_{lat}} \quad \text{et } \vec{E} \perp d\vec{S_{lat}}.$$

$$= \iint_{S_2} \vec{E}(x).d\vec{S_2} - \iint \vec{E}(x).d\vec{S_1}. \qquad d\vec{S_2} = -d\vec{S_1}.$$

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = E(x)S_2 - E(-x)S_2 = 2E(x)S_2.}$$

$= \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$.

« Si $x > a$. $q_{int} = S_2 \times 2a \times \rho_0$ ⟹

« Si $x < a$ $q_{int} = S_2 \times 2x\rho_0$

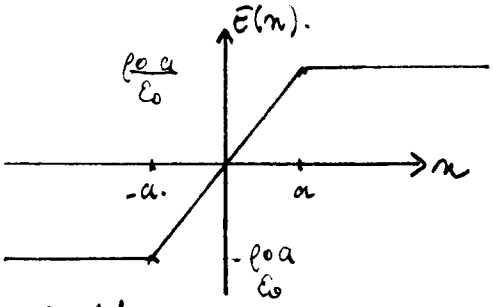
$$\boxed{\begin{cases} E(x) = -\frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0} & \text{si } x \in]-\infty ; -a[. \\ E(x) = \frac{\rho_0 x}{\varepsilon_0} & \text{si } x \in [-a, a]. \\ E(x) = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0} & \text{si } x \in]a ; +\infty[. \end{cases}}$$

Sous un cylindre de base dS. La charge contenue dans la densité est :

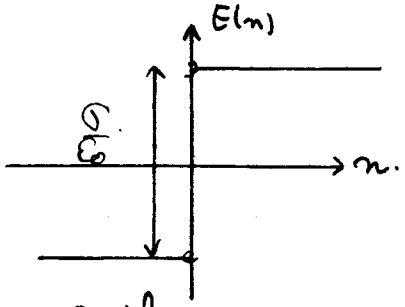
$dq = \rho_0 \, 2a \, dS$. Approche possible si on étudie le champ à distance $d \gg 2a$.

On note $\Sigma = \rho_0 \, 2a$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}(r) = \dfrac{\Sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e_r} \text{ si } r > 0. \\ \vec{E}(r) = -\dfrac{\Sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e_r} \text{ si } r < 0 \end{cases}$$



Tracé pour ρ_0.



Tracé $a \to 0$.

Pour passer de $E(r>0)$ à $E(r<0)$ il faut ajouter ou enlever $\frac{\Sigma}{\varepsilon_0}$. La discontinuité du champ à la traversée d'un plan infini chargé est $\boxed{\frac{\Sigma}{\varepsilon_0}}$

Exercice 8 :

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right).$$

1. La densité de charge décroît quand r augmente, et $\rho(r=a) = 0$.

$$Q = \iiint \rho(r) \, d\tau \quad \text{et} \quad d\tau = r^2 \, dr \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

$$\Rightarrow Q = \rho_0 \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

$$= 4\pi\rho_0 \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 dr = 4\pi\rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2}\right)\Big|_0^a$$

$$= 4\pi\rho_0 \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{5}\right) \Rightarrow \boxed{Q = \frac{8\pi\rho_0 a^3}{15}}$$

2. Distribution à symétrie sphérique. Les plans $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ et $(M, \vec{e_r}, \vec{e_\varphi})$ sont des plans de symétrie.

De plus $\rho(M)$ ne dépend que de r.

Alors : $\boxed{\vec{E}(M) = E(r) \, \vec{e_r}}$.

« Distribution à symétrie élevée, sont chargés à l'infini. On peut appliquer le théorème de Gauss.

3- Choix de la surface de Gauss : Sphère de centre O, de rayon $r > a$.

$$\oiint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad d\vec{S} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e}_r.$$

$$\Rightarrow \boxed{\oiint \vec{E}.d\vec{S} = 4\pi r^2 E_r(r)}$$

« Comme $r > a$; q_{int} est la charge totale du noyau : $\boxed{q_{int} = \frac{8}{15}\pi\rho_0 a^3}$

$$\boxed{\vec{E}_+(r) = \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r}$$

4- Pour un point tel que $r < a$: $\oiint \vec{E}.d\vec{S} = 4\pi r^2 E_r(r)$.

et $q_{int} = 4\pi\rho_0 \int_0^r \left(1 - \frac{r'^2}{a^2}\right) r'^2 dr' = 4\pi\rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2}\right)$

$$\boxed{q_{int} = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3 \left(1 - \frac{3r^2}{5a^2}\right).}$$

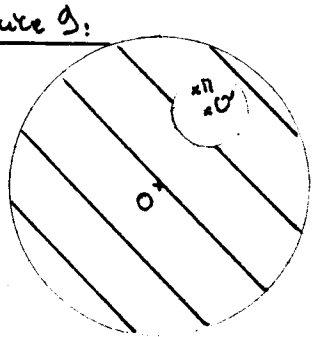
$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}\left(1 - \frac{3r^2}{5a^2}\right)\vec{e}_r.}$$

5 - En $r = a$: $\vec{E}_+(r=a) = \frac{2\rho_0 a}{15\varepsilon_0}\vec{e}_r$ et $\vec{E}_-(r=a) = \frac{\rho_0 a}{3\varepsilon_0}\left(1 - \frac{3}{5}\right)\vec{e}_r$

$$= \frac{2\rho_0 a}{15\varepsilon_0}\vec{e}_r.$$

$\vec{E}_+(r=a) = \vec{E}_-(r=a)$ le champ est continue en $r = a$.

Exercice 3 :



1- Aucun plan passant par M n'est plan de symétrie de la distribution de charge (boule ⊕ cavité).

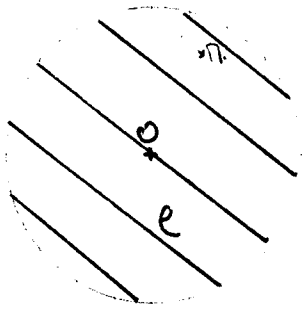
On ne peut pas appliquer le théorème de Gauss.

On note D la distribution que l'on peut percevoir comme :

$$D = Da + Db.$$

Da : boule chargée uniformément ρ centrée en O.

Db : boule chargée uniformément $(-\rho)$ centrée en O'.



- Symétries et invariances sont les mêmes pour les deux distributions.

(O, -ρ)

Pour Da le repère est $(O, \vec{u}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$.

Pour Db le repère est $(O'; \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$.

Le plan $(\Pi, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ est plan de symétrie de la distribution.

Le plan $(\Pi, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ est plan de symétrie de la distribution.

$$\boxed{\vec{E}(\Pi) = E_r(\Pi)\vec{e_r}.}$$

- Invariances : rotations d'angle θ et d'angle φ. $\Rightarrow \underline{\vec{E}(\Pi) = E_r(r)\vec{e_r}.}$

- Choix des surface de Gauss. Sphères de centres O et O' de rayons r et r'.

Σ_1 et Σ_2 (respectivement).

$$\oiint_{\Sigma_1} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \oiint_{\Sigma_2} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}.$$

Le point Π est à l'intérieur de chacune des distributions Da et Db.

$$\Rightarrow \boxed{q_{int} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho} \quad \text{et} \quad \boxed{q_{int} = -\frac{4}{3}\pi r'^3 \rho.}$$

$$\boxed{\oiint_{\Sigma_1} \vec{E}.\vec{dS} = 4\pi r^2 E_r(r)} \qquad \boxed{\oiint_{\Sigma_2} \vec{E}.\vec{dS} = 4\pi r'^2 E_r(r').}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E_a}(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e_r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{OM}} \qquad \boxed{\vec{E_b} = -\frac{\rho r'}{3\varepsilon_0}\vec{e_r} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{O'M}.}$$

Le théorème de superposition : $\vec{E}(\Pi) = \vec{E_a}(\Pi) + \vec{E_b}(\Pi)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\Pi) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{OO'}.}$$

2-a : Cas de la sphère creuse : $O = O' \Rightarrow \underline{\vec{E}(\Pi) = \vec{0}.}$

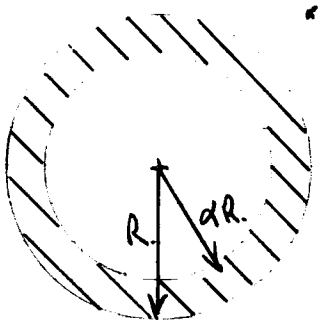
2-b : $\oiint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$ (Symétries et invariances sont les mêmes que précédemment).

$$\underline{\text{Or } q_{int} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}.}$$

3-a : Avec les analogies : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \longleftrightarrow -\mathcal{G}$. $\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_0} \longleftrightarrow -4\pi\mathcal{G}$. $T \longleftrightarrow O$, $M \longleftrightarrow O'$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{g}(\Pi) = -\frac{4}{3}\pi\mathcal{G}\mu\vec{TM}.}$$

Exercice 10 :



1- Etude des symétries : Base sphérique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$. (13)

- $\forall$ plan $(\Pi, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ est plan de symétrie.
- $\forall$ plan $(\Pi, \vec{e_r}, \vec{e_\varphi})$ est plan de symétrie.

$$\vec{E}(\Pi) = E_r(r,\theta,\varphi)\vec{e_r} + E_\theta(r,\theta,\varphi)\vec{e_\theta} + E_\varphi(r,\theta,\varphi)\vec{e_\varphi}$$

$$= E_r(r,\theta,\varphi)\vec{e_r}.$$

- Etude des invariance : - Invariance de la distribution par rotation d'angle θ.

- Invariance de la distribution par rotation d'angle φ.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\Pi) = E_r(r)\vec{e_r}.}$$

- Théorème de Gauss : Σ surface de Gauss sphérique de centre O de rayon $r = OM$.

$$\oiint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad d\vec{S} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e_r}.$$

$$\Rightarrow \oiint \vec{E}.d\vec{S} = 4\pi r^2 E_r(r). \qquad Q_{int} = \rho \times \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - (\alpha R)^3\right) = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \left(1-\alpha^3\right).$$

$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{\rho R^3 (1-\alpha^3)}{3\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(\Pi) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\left(1-\alpha^3\right)\vec{e_r}.}$$

2- Dans Π entre αR et R. Seule change la charge intérieure à la surface de Gauss.

$$\boxed{Q_{int} = \rho \times \frac{4\pi}{3}\left(r^3 - (\alpha R)^3\right).}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\Pi) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\left(1 - \left(\frac{\alpha R}{r}\right)^3\right)\vec{e_r}.}$$

3- Par définition : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$. Or en coordonnées sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}}$ $\left|\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\left(1-\alpha^3\right)} \quad ; \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \text{ et } \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0.$$

$\Rightarrow V$ ne dépend ni de θ ni de φ, on retrouve le résultat de l'étude des invariances.

$$\Rightarrow \int_r^{+\infty} \frac{\partial V}{\partial r'} dr' = -\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(1-\alpha^3\right)\int_r^{+\infty} \frac{dr'}{r'^2}$$

$(\lim V(r \to +\infty) = 0)$ $\Rightarrow -V(r) = +\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\left(1-\alpha^3\right)\left.\frac{1}{r'}\right|_r^{+\infty}$

$$\Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}\left(1-\alpha^3\right).}$$

4- De la même manière en substituant $\vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\left(1 - \left(\frac{\alpha R}{r}\right)^3\right)\vec{e_r}$, on (1a)

intègre la relation $-\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\left(1 - \left(\frac{\alpha R}{r}\right)^3\right)$ entre αR et r.

$$\int_{\alpha R}^{r} \frac{\partial V}{\partial r'} dr' = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_{\alpha R}^{r} r'\left(1 - \left(\frac{\alpha R}{r'}\right)^3\right) dr'.$$

$$\Rightarrow V(r) - V(\alpha R) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int_{\alpha R}^{r} r' - \frac{(\alpha R)^3}{r'^2}\, dr'$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left\{\frac{r'^2}{2} + \frac{(\alpha R)^3}{r'}\right\}\Big|_{\alpha R}^{r}.$$

$$= -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left\{\frac{r^2}{2} + \frac{(\alpha R)^3}{r} - \frac{(\alpha R)^2}{2} - (\alpha R)^2\right\}.$$

$$= -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left\{\frac{r^2}{2} + \frac{(\alpha R)^3}{r} - \frac{3(\alpha R)^2}{2}\right\}.$$

Continuité du potentiel en R :

La première expression pour $r > R$ donne : $V(R) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}R^2(1 - \alpha^3)$.

La deuxième expression pour $r < R$ donne : $V(R) - V(\alpha R) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left\{\frac{R^2}{2} + \frac{(\alpha R)^3}{R} - \frac{3(\alpha R)^2}{2}\right\}$.

$$\Rightarrow \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(R^2 - \alpha^3 R^2\right) - V(\alpha R) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{2} + \alpha^3 R^2 - \frac{3(\alpha R)^2}{2}\right).$$

$$\Rightarrow \boxed{V(\alpha R) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left\{\frac{3R^2}{2} - \frac{3(\alpha R)^2}{2}\right\}}.$$

<u>Donc finalement pour $\alpha R \leq r < R$:</u>

$$V(r) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left\{\frac{r^2}{2} + \frac{(\alpha R)^3}{r} - \frac{3(\alpha R)^2}{2} - \frac{3R^2}{2} + \frac{3(\alpha R)^2}{2}\right\}.$$

$$V(r) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left\{\frac{r^2}{2} - \frac{3R^2}{2} + \frac{(\alpha R)^3}{r}\right\}.$$

Reste afin de répondre à la question, pour $r < \alpha R$.

Le théorème de Gauss donne : $\vec{E} = \vec{0}$.

$\Rightarrow V = cte = V(r = \alpha R)$ par continuité du potentiel.

$$\Rightarrow V(r < \alpha R) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3R^2}{2} - \frac{3(\alpha R)^2}{2}\right)$$

$$\boxed{V(r < \alpha R) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left(1 - \alpha^2\right)}.$$

5- Pour un élément de volume de la couronne sphérique :

$$d\tau = 4\pi r^2 dr = S_\alpha dr.$$

Si $1-\alpha \ll 1$ alors $(1-\alpha)R \to 0$ Alors $(1-\alpha)R = dr$.

$$\Rightarrow \boxed{d\tau = S_\alpha (1-\alpha) R.}$$

La charge $dq = \rho_\alpha d\tau = \sigma_\alpha S(1-\alpha)R$.

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \rho(1-\alpha)R.}$$

6- Avec les calculs fait précédemment : $U = V(R) - V(0)$

$$\boxed{U(\alpha) = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}(1-\alpha^3) - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}(1-\alpha^2).}$$

Dans la limite $\alpha \to 1$, un développement de Taylor donne :

$$\boxed{U(\alpha) \simeq U(1) + \frac{dU}{d\alpha}(\alpha=1)(\alpha-1).}$$

Or $U(1) = 0$ et $\frac{dU}{d\alpha}(\alpha=1) = \frac{\rho R^2}{\varepsilon_0} - \frac{\rho R^2}{\varepsilon_0} = 0$.

Il faut alors faire un développement limité à l'ordre 2,

$$U(\alpha) \simeq U(\alpha=1) + \frac{dU}{d\alpha}(\alpha=1)(\alpha-1) + \frac{1}{2}\frac{d^2U}{d\alpha^2}(\alpha=1)(\alpha-1)^2.$$

et $\frac{d^2U}{d\alpha^2} = -2\frac{\rho R^2}{\varepsilon_0}\alpha + \frac{\rho R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{d^2U}{d\alpha^2}(\alpha=1) = -\frac{\rho R^2}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow U(\alpha) \simeq -\frac{1}{2}\frac{\rho R^2}{\varepsilon_0}(\alpha-1)^2$$

$$\simeq \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}(\alpha-1)(1-\alpha)$$

$$\boxed{U(\alpha) \simeq \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}(\alpha-1).}$$

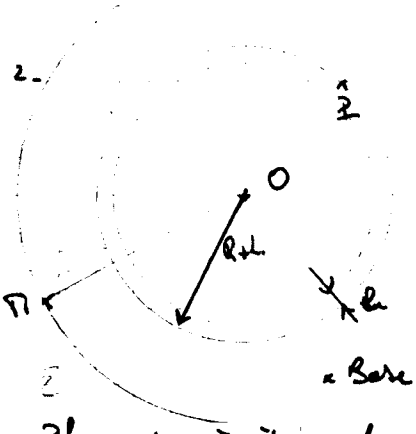
Exercice 18 :

1- La personne et les éléments de sont environnement vont se comporter comme un condensateur.

Les armatures étant : les pointes de cheveux et le reste du système.

Les charges aux pointes étants de même signes elles vont se repousser. Chaque cheveux va subir une résultante de force électrostatiques tendant à les éloigner les uns des autres. Les cheveux se lèvent lorsque cette résultante compense le poids. Il en cheveux.

2-



Densité de charges grande, alors on peut assimiler la distribution de charge à une distribution volumique.

Les charges se dressent dans toutes les directions. Le modèle est celui d'une distribution sphérique.

- Base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$.
- Plan $(\Pi, \vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ plan de symétrie de la distribution.
- Plan $(\Pi, \vec{e_r}, \vec{e_\varphi})$ plan de symétrie de la distribution.
- Invariances par rotations d'angles θ et φ. $\Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{e_r}}$

3- Surface de Gauss : sphère de rayon $r = OM$ de centre O.

Théorème de Gauss : $\boxed{\oint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$ et $\oint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$.

Comme $r > R+L$ $Q_{int} = Q_{tot}$ (charge totale de la chevelure).

Il m'est demandé de ne pas utiliser q.

Soit Σ et N deux points tels que : $\vec{\Sigma N} = \Sigma N \vec{e_r}$. La circulation de $\vec{E}$ le long de ΣN donne : $\int_\Sigma^N \vec{E}.d\vec{l} = \int_{R+L}^{r_N} E(r)\,dr = \int_{R+L}^{r_N} -\frac{dV}{dr}\,dr = V(R+L) - V(r_N)$.

De plus $\int_{R+L}^{r_N} \frac{Q_{tot}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{Q_{tot}}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R+L}^{r_N} = \boxed{\frac{Q_{tot}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R+L} - \frac{1}{r_N}\right)}$

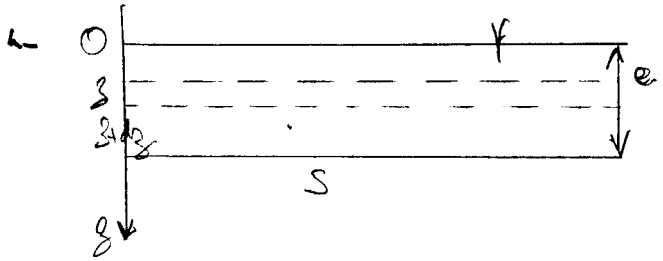
Il choisir est fait de prendre $\begin{cases} V(r_N \to +\infty) = 0 \\ V(R+L) = V_0 \end{cases}$

Donc $N \to +\infty \Rightarrow V_0 = \frac{Q_{tot}}{4\pi\varepsilon_0 (R+L)} \Rightarrow Q_{tot} = 4\pi\varepsilon_0 (R+L) V_0$.

Finalement $\boxed{\vec{E}(r) = \frac{(R+L)V_0}{r^2}\,\vec{e_r}}$.

A l'intérieur de la chevelure : $Q_{int} = 0 \Rightarrow \vec{E}_{int} = \vec{0}$.

4-



Les charges contenues dans le volume dV entre z et z+dz subissent une force de la part des charges environnantes formant le champ $\vec{E}(z)$.

$dq = \rho(z)\,S\,dz$. Avec $\rho(z)$ la densité volumique de charge.

Alors : $\boxed{\vec{dF} = (dq)\,\vec{E}(z) = \rho(z)\,E(z)\,S\,dz\,\vec{e}_z}$.

Sur l'épaisseur e chargée de la chevelure : $\vec{F} = \int_0^e \vec{dF} = \int_0^e \rho(z)\,\vec{E}(z)\,S\,dz\,\vec{e}_z$.

5- Le théorème local de Maxwell-Gauss donne $\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$. Le problème étant à une dimension : $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{dE}{dz} = \frac{\rho(z)}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \vec{F} = \int_0^e \varepsilon_0 S \vec{E}(z) \frac{dE}{dz} dz\,\vec{e}_z = \varepsilon_0 S \vec{e}_z \int_{E_{int}}^{E_{surface}} E\,dE.$$

$$= \varepsilon_0 S \frac{E^2}{2}\Big|_{E_{int}}^{E_{surface}} \vec{e}_z.$$

Or $\vec{E}_{int\acute{e}rieur} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{F} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 S \vec{E}_{surface}\vec{e}_z}$.

6- Calcul de la force électrostatique subie par 1 cheveux : $\vec{F}_{cheveux}$

La densité surfacique de cheveux est n_c. Soit sur la cuir chevelu :

$$\underline{N_{cheveux} = n_c \times 4\pi R^2}.$$

Donc au niveau des pointes la densité surfacique de pointe est :

$$\boxed{n_{c,pointe} = \frac{N_{cheveux}}{4\pi(R+L)^2} = \frac{n_c R^2}{(R+L)^2}}.$$

Dans le volume V précédent il y a : $n_{c,pointe} \times S$ cheveux. Chacun subissant la force :

$$\vec{F}_{cheveux} = \frac{\vec{F}}{n_{c,pointe} \times S} = -\frac{1}{2\,n_{c,pointe}} \varepsilon_0 E^2_{surface}\vec{e}_z.$$

Cette force étant dirigée selon la verticale ascendante (puisque O_z descend).

Le poids d'un cheveux est : $\vec{P}_{cheveux} = \mu \times L \times \pi r^2_{cheveux} \pi \times \vec{g}$

$$= \underline{\mu \cdot L \times \pi \pi r^2_{cheveux} \times g\,\vec{e}_z}.$$

Un cheveux reste dressé sur la tête si et seulement si :

$$\frac{1}{2\,n_{c,pointe}} \varepsilon_0 E^2_{surface} > \mu L \pi r^2_{cheveux} \times g.$$

Or $E_{surface} = \frac{V_0}{(R+L)^2}(R+L) = \frac{V_0}{(R+L)}$ $\Rightarrow$ $\frac{\varepsilon_0}{2 n_{c,pointe}} \frac{V_0^2}{(R+L)^2} > \mu L \pi r^2_{cheveux} g$.

$$\Leftrightarrow \boxed{V_0 > \sqrt{\frac{2 n_{c,pointe}\,\mu \pi r^2_{cheveux} g \times L (R+L)^2}{\varepsilon_0}}}$$

N.N: $n_c = 200\ cm^{-2}$.

$R = 7\ cm = 7\,10^{-2}\ m$.

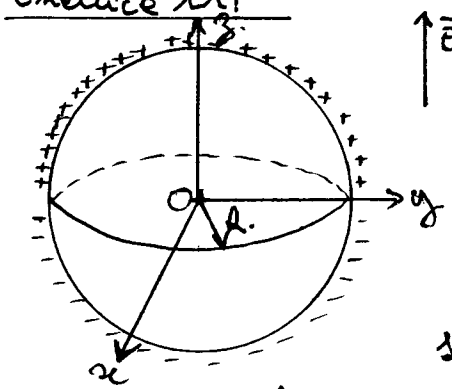
$L = 30\ cm$ cheveux longs.

$r_{cheveux} = 0{,}07\ mm$.

$$\Rightarrow V_0 > \sqrt{\frac{2 \times 200.10^{4} \times 1{,}3.10^{3} \times \pi \times (0{,}07.10^{-3})^2 \times 9{,}81 \times 30.10^{-2} \times (33.10^{-2})^2}{8{,}9.10^{-12}}}$$

$$\underline{V_0 > 2000\ kV.}$$

Exercice 11:



$\vec{E_0} = E_0 \vec{e_z}$.

1- $\vec{E_0} = E_0 \vec{e_z}$ et $\vec{E_0} = -\overrightarrow{grad}\, V_E(r,\theta)$.

$\vec{E_0}$ est seulement suivant $\vec{e_z}$.

$\Rightarrow V_E = -E_0 z + A$. $A = cte$.

En passant de coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphérique: $\underline{z = r\cos\theta}$. : $V_E(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + A$.

On choisit la référence de potentiel en $r=0$: $V_E(r=0,\theta) = 0 \Rightarrow A = 0$.

$$\Rightarrow \boxed{V_E(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta.}$$

2- La sphère est chargée en surface: charge $\ominus$ en $z<0$ et $\oplus$ en $z>0$.

Pas de charges dans le volume, donc $\underline{\vec{E}_{int} = \vec{0}}$ champ intérieur à la sphère.

Alors le potentiel de la sphère est constant.

Donc, par continuité du potentiel: $V(r=R,\theta) = C$

$$\Rightarrow -E_0 R\cos\theta + R^n g(\theta) = C$$

$$\Rightarrow \boxed{g(\theta) = \frac{C}{R^n} + E_0 R^{1-n}\cos\theta.} \text{ et } \frac{C}{R^n} = C' = cte$$

En un point π hors de la sphère: $\Delta V(r,\theta) = 0$, il n'y a pas de charge en dehors de la sphère.

$$\star\ \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = -\frac{2E_0\cos\theta}{r} + n(n+1) r^{n-2}\left(E_0 R^{1-n}\cos\theta + C'\right).$$

$$\star\ \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial\theta}\right) = \frac{2E_0\cos\theta}{r} - 2r^{n-2} E_0 R^{1-n}\cos\theta.$$

Autres de $C'=0$.

- $\overrightarrow{grad}\, V(r,\theta) = \left| \begin{array}{l} E_0 \cos\theta - m r^{m-1}(E_0 R^{1-m}\cos\theta + C')\vec{r} \\ -E_0 \sin\theta + r^{m-1}(E_0 R^{1-m}\sin\theta)\vec{e_\theta} \end{array} \right|$

Soit une surface de Gauss sphérique de centre O et de rayon $r < R$, donc dans la sphère.

- théorème de Gauss : $\oiint_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ et $d\vec{S} = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \vec{er}$.

et $\underline{Q_{int} = 0.}$ $\left| \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \{E_0\cos\theta - m r^{m-1}(E_0 R^{1-m}\cos\theta + C')\}\, r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 0 \right.$

$\Rightarrow 2\pi r^2 E_0 \int_0^{\pi} \cos\theta\sin\theta\, d\theta - 2\pi m r^{m+1} E_0 R^{1-m}\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta\, d\theta - m 2^{m+1} 2\pi C' \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta = 0.$

$\Rightarrow C' \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta = 0 \Rightarrow 2C' = 0 \Rightarrow \boxed{C' = 0.}$

A partir de $\Delta V = 0$: avec $C' = 0$.

$\Delta V = 0 \Rightarrow -\frac{2E_0\cos\theta}{r} + m(m+1)E_0 r^{m-2}R^{1-m}\cos\theta + \frac{2E_0\cos\theta}{r} - 2E_0 r^{m-2}R^{1-m}\cos\theta = 0.$

$\Rightarrow \left| m(m+1) = 2. \right. \Rightarrow \boxed{m = 1 \text{ ou } m = -2.}$

Le potentiel $V_3(r,\theta)$ ne doit pas diverger lorsque $r \to +\infty \Rightarrow m = -2$.

$$\boxed{V(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 R^3\cos\theta}{r^2}}$$

Les relations de passage proche de la surface :

$\vec{E}_{int} = \vec{0}$ et $\left| \vec{E}(r \to R^+, \theta) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{er}. \right.$

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V \Rightarrow \vec{E} = \left| \begin{array}{l} E_0\cos\theta + \frac{2E_0 R^3\cos\theta}{r^3}\, \vec{er} \\ -E_0\sin\theta + \frac{E_0 R^3\sin\theta}{r^3}\vec{e_\theta} \end{array} \right.$

$\Rightarrow \frac{\sigma(\theta)}{\varepsilon_0} = 3E_0\cos\theta \Rightarrow \boxed{\sigma(\theta) = 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta}$

On trouve bien $\sigma(\theta = \pi) < 0$.

3. Potentiel créé par une charge ponctuelle Q à l'origine : $V_Q(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$.

$\Rightarrow \left| V(r,\theta) = -E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 R^3\cos\theta}{r^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}. \right.$

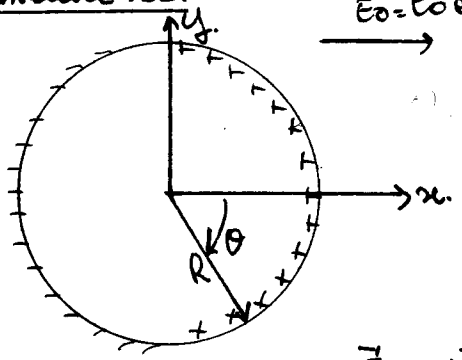
Alors $E_r \vec{e_r} = \left\{ E_0 \cos\theta + \frac{2E_0 R^3 \cos\theta}{r^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \right\} \vec{e_r}$.

$E_r(r \to R^+, \theta)\vec{e_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_r}$. $\Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \left\{ 3E_0\cos\theta + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2} \right\}$.

$\Rightarrow \sigma(\theta) = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta + \frac{Q}{4\pi R^2}$

Pour $\theta = \pi$, densité $\sigma(\theta=\pi) = -3\varepsilon_0 E_0 + \frac{Q}{4\pi R^2} = 0$ pour éviter la présence de charge négative. $\Rightarrow$ $\boxed{Q = 12\pi\varepsilon_0 E_0 R^2.}$

Exercice 12 :



$\vec{E_0} = E_0\vec{e_x}$. 1 - Base d'étude cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$.

Pas de charge dans le volume du conducteur.

Alors $\vec{E_{int}} = \vec{0}$ à l'intérieur du conducteur.

$V(r) = A\ln\left(\frac{r}{R}\right) + Br\cos\theta + C\frac{\cos\theta}{r}$.

$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \left\{ -\frac{A}{r} - B\cos\theta + \frac{C\cos\theta}{r^2} \right\}\vec{e_r}$

$\left\{ B\sin\theta + \frac{C\sin\theta}{r^2} \right\}\vec{e_\theta}$.

Lorsque $r \to +\infty$ $\vec{E} = E_0\vec{e_x}$ $\Rightarrow$ pour $\theta = 0$: $\boxed{B = -E_0.}$

Continuité du potentiel en $R = r$. Potentiel nul dans le conducteur.

$\Rightarrow A\ln\left(\frac{R}{R}\right) - ER\cos\theta + \frac{C\cos\theta}{R} = 0 \Rightarrow \boxed{C = E_0 R^2.}$

Sur face Σ de Gauss : cylindre de rayon $r < R$ et d'axe Oz de hauteur h.

Théorème de Gauss : $\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ et $\underline{Q_{int} = 0}$

$\boxed{d\vec{S} = r\,d\theta\,dz\,\vec{e_r} + 2\pi r\,dr\,d\theta\,\vec{e_z}.}$ $\Rightarrow \oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = -Ah\int_0^{2\pi} d\theta + E_0 hr\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta + \frac{E_0 R^2}{r}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$

$\Rightarrow \boxed{A = 0.}$

$\Rightarrow \boxed{V(r) = -E_0 r\cos\theta + \frac{E_0 R^2\cos\theta}{r}}$; $\boxed{\vec{E}(r) = \left\{ E_0\cos\theta + \frac{E_0 R^2\cos\theta}{r^2} \right\}\vec{e_r} \left\{ -E_0\sin\theta + \frac{E_0 R^2\sin\theta}{r^2} \right\}\vec{e_\theta}.}$

De la même manière que précédemment. $\vec{E}(r \to R^+, \theta) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e_r}$.

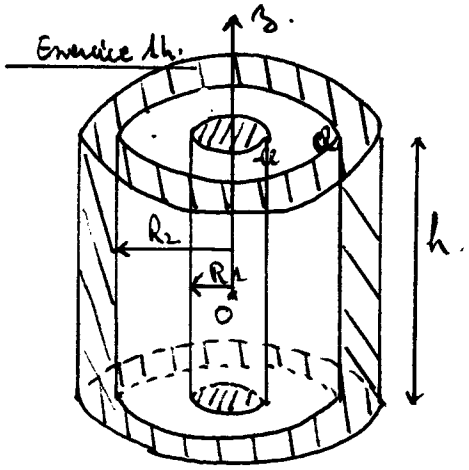
$\vec{E}_{int}(r \to C) - \vec{E}_{ext}(r \to R^+) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_0 \cos\theta + E_0 \cos\theta = 2E_0 \cos\theta$

$\Rightarrow \boxed{\sigma(\theta) = 2\varepsilon_0 E_0 \cos\theta.}$

6- Pour $\theta = \pi$, $\sigma < 0$; on trouve bien un résultat cohérent avec l'analyse qualitative précédente.

Exercice 14.



1- Les deux conducteurs ne sont pas en influence totale. Le conducteur C_2 n'entoure pas totalement le conducteur C_1.

Pour faire l'hypothèse d'une influence totale il faut considérer $\boxed{(R_2 - R_1) \ll h.}$

2- Soit M un point inter-armatures. On note V_1 le potentiel de C_1 et V_2 le potentiel de C_2, tels que $\underline{V_2 > V_1}$.

Soit Σ une surface de Gauss de rayon r de hauteur h (cylindre) contenant M.

Le théorème de Gauss : $\oiint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ et $\underline{Q_{int} = -Q}$.

$d\vec{S} = r\,d\theta\,dz\,\vec{e_r} + 2\pi r\,dr.\vec{e_z} - 2\pi r\,dr\,\vec{e_z}$.

Dans les conditions de l'énoncé : $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e_r}$.

$\Rightarrow E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{-Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{-Q}{2\pi r h \varepsilon_0}\vec{e_r}.}$

La circulation de $\vec{E}(M)$ entre R_1 et R_2 donne :

$$\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} -\text{grad}\,V.d\vec{l} = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{dV}{dr}\,dr.$$

$$\Rightarrow \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.d\vec{l} = -V(R_2) + V(R_1)$$

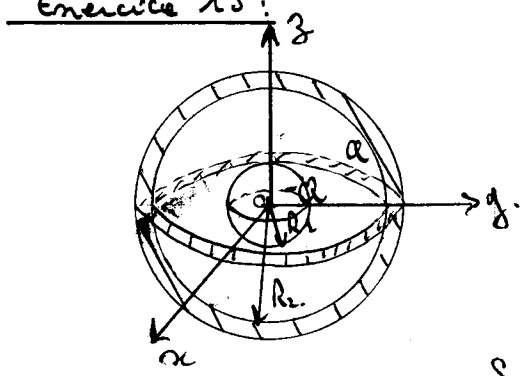
De plus $\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{-Q}{2\pi r \varepsilon_0 h}\,dr = \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln(R_2) - \ln(R_1)$.

Finalement : $V(R_2) - V(R_1) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$.

En définition : $C = \frac{Q}{V(R_2) - V(R_1)}$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}}$$

Exercice 15 :



1. Les conducteurs sont en influence totale. Le conducteur $\mathcal{C}_2$ englobe totalement le conducteur $\mathcal{C}_1$.

2. On note V_1 le potentiel de $\mathcal{C}_1$ et V_2 celui de $\mathcal{C}_2$: tel que $\underline{V_2 > V_1}$.

Soit M un point inter-armatures. Problème à symétries et invariance sphérique : $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r$.

Soit Σ une surface de Gauss sphérique de rayon $r = OM$.

Théorème de Gauss : $\oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ et $\underline{Q_{int} = -Q}$.

et $d\vec{S} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \vec{e}_r$.

$$\Rightarrow \oint \vec{E}.d\vec{S} = E_r(r) \times 4\pi r^2.$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r}$$

Circulation de $\vec{E}$ entre R_1 et R_2 : $\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.d\vec{l} = -\int_{R_1}^{R_2} \text{grad } V.d\vec{l}$ et $d\vec{l} = dr\,\vec{e}_r$.

$$= -\int_{R_1}^{R_2} \frac{dV}{dr} dr = -V(R_2) + V(R_1).$$

De plus $\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$.

Or $C = \frac{Q}{V(R_2) - V(R_1)} \Rightarrow C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \Rightarrow \boxed{C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$

3.i : L'énergie emmagasinée dans le condensateur : $\mathcal{E} = \frac{1}{2} C U^2$.

et $U = V(R_2) - V(R_1) = \frac{Q}{C} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2} C \frac{Q^2}{C^2} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$

La densité volumique d'énergie électrostatique : $u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$.

$$\Rightarrow \boxed{u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \times \left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2 r^4} = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}}$$

On intègre cette densité volumique sur le volume inter-armatures.

$$\mathcal{E} = \iiint u_e \, d\tau \quad \text{et} \quad d\tau = r^2 \, dr \sin\theta \, d\theta \, d\varphi.$$

$$= \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2}{r^4} dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{Q^2 4\pi}{32\pi^2\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{C} = \frac{R_2 - R_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$