TD n°7 : Modèle ondulatoire de la lumière.

Exercice 1 :

1. Pour un modèle d'onde plane : $\underline{s}(M) = s_0 e^{-j\varphi_M}$

$$= s_0 e^{-j(k\vec{u}\cdot\vec{OM} + \varphi(S))}$$

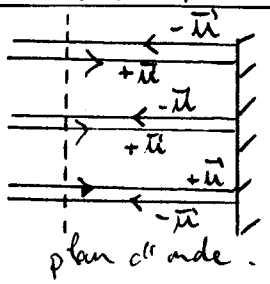
Plus d'onde conjuguée est $\underline{s}^*(M) = s_0 e^{j(k\vec{u}\cdot\vec{OM} + \varphi(S))}$

$$\boxed{\underline{s}^* = s_0 e^{-j(-k\vec{u}\cdot\vec{OM} - \varphi(S))}}$$

L'onde conjuguée se propage dans la même direction que $\underline{s}$, elle possède les mêmes plan d'onde, mais se propage en sens inverse.

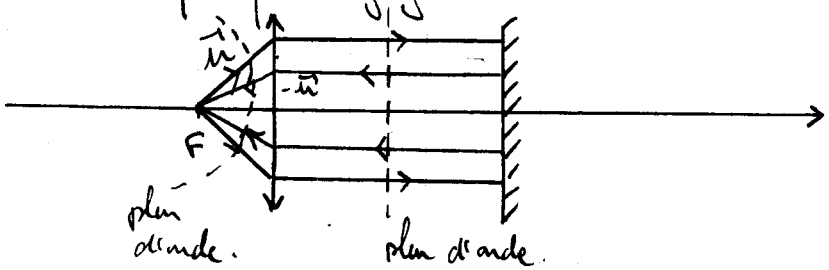
2. Cas d'une onde plane :

Il suffit d'utiliser un miroir ou une surface métallique perpendiculaire à la direction $\vec{u}$:



Cas d'une onde sphérique :

- On peut placer la source S au foyer objet d'une lentille mince convergente. Une onde plane émerge de la lentille. En plaçant un miroir plan après la lentille et dont la surface est tangente à l'onde sphérique de la lentille, le principe de retour inverse donne une onde sphérique conjuguée.



- On peut également utiliser un miroir sphérique, placer la source en son centre.

Exercice 2 :

$$t(M) = \alpha - \beta \left| \underline{s}(M) - \underline{s}_0(M) \right|^2.$$

1. Phénomènes physiques entrent en jeu :

Il est possible que tout le faisceau $\underline{s}_0$ n'atteigne pas l'objet : section droite du

faisceau supérieur. à l'entrée spatiale de l'objet.

De plus l'objet absorbe une partie du rayonnement et l'objet diffuse une partie de la lumière. (2)

Alors $I_0 = \underline{A}_0 \underline{A}_0^* = |A_0|^2 > I = \underline{A}\,\underline{A}^* = |A|^2$.

$$\Rightarrow \boxed{|A_0| > |A|.}$$

2- On cherche l'équation qui définit l'amplitude de $\underline{A}_1$ de l'onde transmise par le film holographique une fois éclairé par $\underline{A}_0$.

$$\underline{A}_1(R) = A_0 \times t = \underline{A}_0 \times (\alpha - \beta |A_0 + A|^2).$$

$$= \underline{A}_0 \times \{\alpha - \beta (A_0 + A)(A_0 + A)^*\}.$$

$$= \underline{A}_0 \times \{\alpha - \beta (A_0 + A)(A_0^* + A^*)\}.$$

$$= \underline{A}_0 \times \{\alpha - \beta (A_0 A_0^* + A A^* + A_0 A^* + A A_0^*)\}.$$

En introduisant les intensités des ondes $\underline{A}_0$ et $\underline{A}$.

$$\underline{A}_1 = A_0 \times \{\alpha - \beta (I_0 + I + A A_0^* + A_0 A^*)\}.$$

$$\underline{A}_1 = (\alpha - \beta I - \beta I_0)\underline{A}_0 - \beta A_0^2 \underline{A}^* - \beta I_0 \underline{A}$$

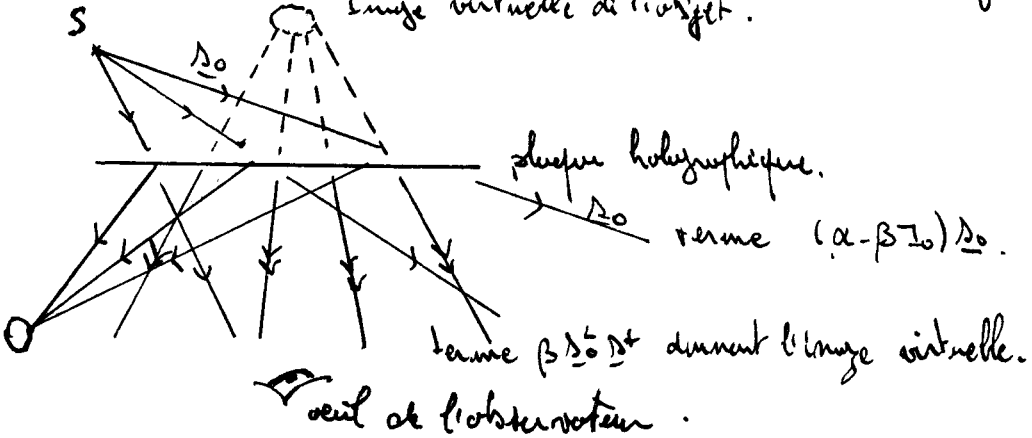
D'après la première question $I_0 > I$, et l'énoncé suggère que I soit négligeable devant I_0.

$$\Rightarrow \boxed{\underline{A}_1 = (\alpha - \beta I_0)\underline{A}_0 - \beta A_0^2 \underline{A}^* - \beta I_0 \underline{A}}$$

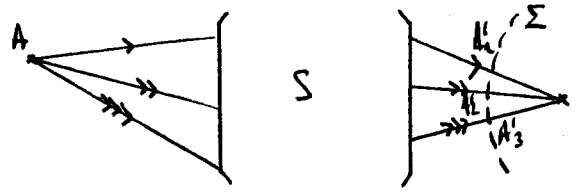
- Le terme $(\alpha - \beta I_0)\underline{A}_0$ décrit une onde de même nature que l'onde incidente $\underline{A}_0$, mais pas de même amplitude.

- Le terme $\beta A_0^2 \underline{A}^*$ est proportionnel à l'onde conjuguée $\underline{A}^*$ émise par l'objet lorsqu'il est éclairé. Si $\underline{A}$ est une onde sphérique divergente, alors $\underline{A}^*$ est une onde sphérique convergente. Donne une image virtuelle de l'objet.

- Le terme $\underline{A}\beta I_0$ représente une onde de même nature que celle émise par l'objet.



Exercice 3:



1 - Tous les rayons issus de A passent par A' après avoir traversé (S) si le système est rigoureusement stigmatique.

Considérons Σ une surface d'onde de l'espace « image réelle ». En note A'_i les points d'intersection des rayons lumineux émergents de (S) et coupant Σ.

Par définition d'une surface d'onde : $\boxed{(AA'_1) = (AA'_2) = \dots = (AA'_i).}$

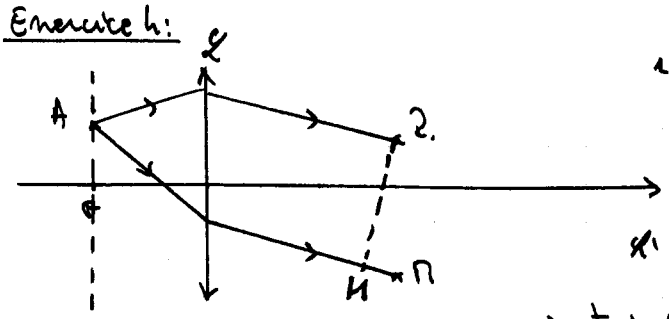
De plus le théorème de Malus affirme : $A'A'_1$; $A'A'_2$; … ; $A'A'_i$ sont orthogonale à Σ.

Donc Σ est une sphère de centre A'. Comme le milieu est homogène et isotrope, son indice de réfraction est le même en tout point et dans toute direction du milieu :

Donc $(A'_1A') = (A'_2A') = \dots = (A'_iA').$

$\Rightarrow \boxed{(AA') = \text{cte}.}$ Condition du stigmatisme rigoureux.

Exercice 4:



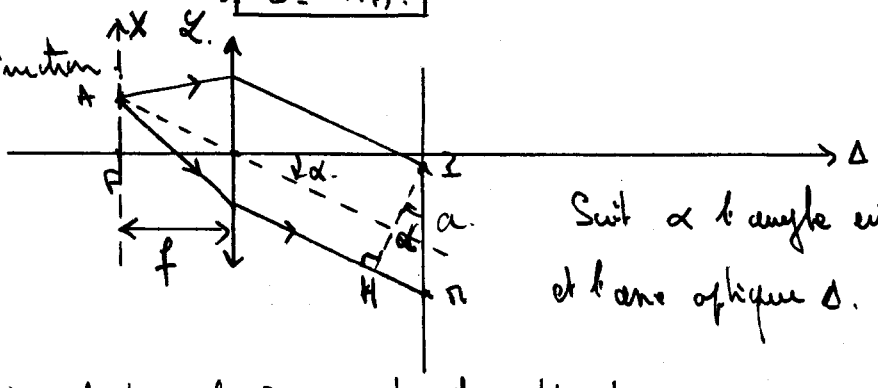
1 - Pour calculer la différence de chemin optique en utilisant le théorème de Malus.

Si indices des milieux compris entre la lentille sont supposés égaux à 1, les milieux étant homogènes et isotropes.

Le théorème de Malus donne : $\delta = (A\Pi) - (AI) = (AH) + (H\Pi) - (AI)$. Et $\underline{(AH) = (AI).}$

$\Rightarrow \boxed{\delta = (H\Pi).}$

Pour construire :



Soit α l'angle entre les rayons émergents et l'axe optique Δ.

Dans le triangle IHΠ rectangle en H : $\boxed{\sin\alpha = -\frac{H\Pi}{\Pi I} = -\frac{H\Pi}{a}.}$

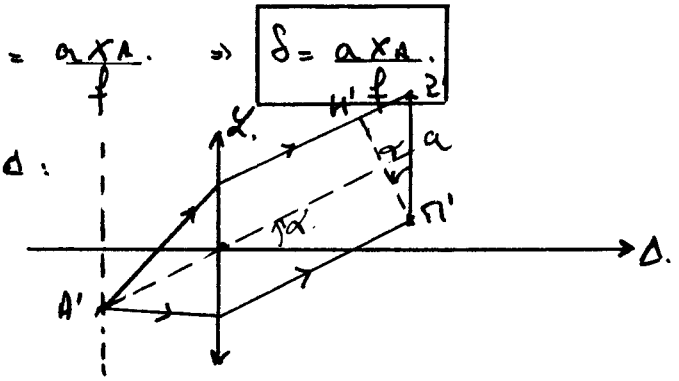
On note x_A la distance entre A et l'axe optique.

$\underline{\tan\alpha = -\frac{x_A}{f}.}$

La lentille est utilisée dans les conditions de Gauss : $\alpha \ll 1$.

$\Rightarrow \boxed{\sin\alpha \simeq \alpha \simeq \tan\alpha.}$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{H\Pi}{a} = -\frac{X_H}{f} \Rightarrow H\Pi = \frac{a X_A}{f}$. $\Rightarrow \boxed{\delta = \frac{a X_A}{f}}$.



Rayon A' symétrique de A par rapport à Δ :

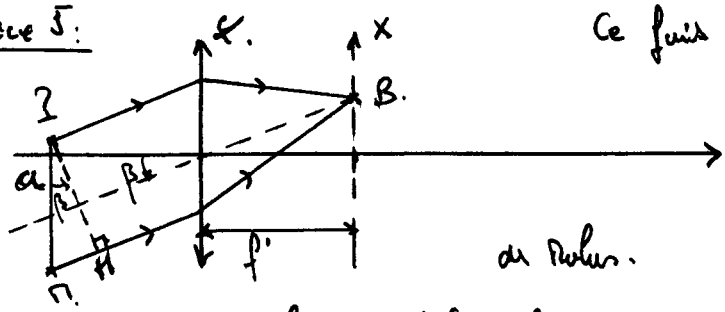
De même que précédemment :

$\tan\alpha = \frac{X_{A'}}{f}$. et $\sin\alpha = \frac{H'\Sigma'}{a}$.

et $\boxed{\delta = (A'\Sigma') - (A'\Pi') = (H'\Sigma')}$ (théorème de Malus).

$\Rightarrow \boxed{\delta = \frac{a X_{A'}}{f}}$. ℰ même résultat que précédemment.

Exercice 5 :



Ce fois ci les points Σ et Π ne peuvent pas être deux points sources, ainsi on ne peut pas utiliser le théorème de Malus.

On cherche en utilisant le <u>principe du retour inverse de la lumière</u> en supposant qu'il existe une source en B.

$\boxed{\delta = (\Pi B) - (\Sigma B) = (\Pi H) + (HB) - (\Sigma B) = (\Pi H)}$ (théorème de Malus).

Comme précédemment : $\sin\beta = \frac{\Pi H}{a}$ et $\tan\beta = \frac{X_B}{f'}$.

Les conditions de Gauss donnent : $\beta \ll 1 \Rightarrow \sin\beta \simeq \beta \simeq \tan\beta$.

$\Rightarrow \Pi H = \frac{a X_B}{f'}$. or $n = 1$.

$\Rightarrow \boxed{\delta = \frac{a X_B}{f'}}$.

Exercice 6 :

1 - En notation complexe : $\underline{E}(t) = E_0 e^{-t/\tau} e^{j\omega_0 t}$ si $t \geq 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{E}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{E}(t)\,\underline{E}^*(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} E_0^2 e^{-2t/\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle E^2(t)\rangle_t\, dt.$$

A une constante dimensionnelle près, cette quantité représente une grandeur énergétique.

Dans le cas de l'onde plane $\langle E^2(t)\rangle_t$ est proportionnel à la

puissance rayonnée par l'onde. Donc $\langle E^2(t)\rangle_+ dt$ est une énergie surfacique.

2. $\hat{s}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{E}(t)\, e^{2j\pi\nu t}\, dt$.

Le théorème de Plancherel Parseval donne : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{s}(\nu)|^2 d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{E}(t)|^2 dt}$.

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} |\underline{E}(t)|^2 dt$ est une grandeur proportionnelle à l'énergie surfacique totale émise par la source.

$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{s}(\nu)|^2 d\nu$ l'est également. $\boxed{|\hat{s}(\nu)|^2 \text{ représente la répartition de l'énergie surfacique spectrale.}}$

- $w(\nu) = |\hat{s}(\nu)|^2 = \hat{s}(\nu)\hat{s}(\nu)^*$

$$= \frac{E_0}{\frac{1}{\tau} + 2j\pi(\nu-\nu_0)} \times \frac{E_0}{\frac{1}{\tau} - 2j\pi(\nu-\nu_0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{w(\nu) = \frac{E_0^2}{\frac{1}{\tau^2} + 4\pi^2(\nu-\nu_0)^2}}$$

3. $\Delta\nu_0 \times \tau = \frac{1}{\pi}$. Or en introduisant λ_0 : $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$

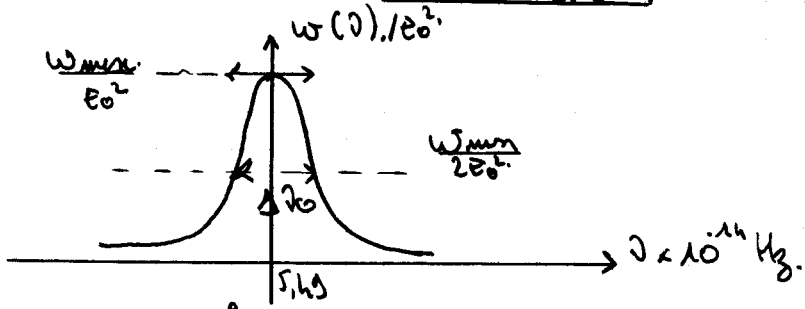
Alors $\boxed{\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\nu_0}{\nu_0}}$ (à partir d'une différentielle logarithmique).

$$\Rightarrow \Delta\lambda_0 = \frac{\Delta\nu_0}{\nu_0} \times \lambda_0 = \frac{\lambda_0 \times \lambda_0}{c} \times \frac{1}{\tau\pi}.$$

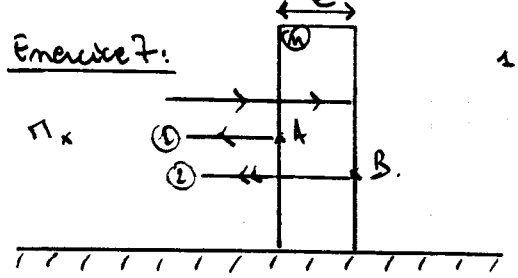
$$\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{\lambda_0^2}{\pi c\, \Delta\lambda_0}}$$

A.N. $\tau = \frac{(546.10^{-9})^2}{\pi \times 3.10^8 \times 0{,}2.10^{-9}}$

$\boxed{\tau \approx 10^{-12}\ s.}$



Exercice 7 :



1. Par définition du déphase entre l'onde réfléchie en A et en B : $\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\{(SM)_2 - (SM_x)_1\}}$.

Avec S : la source de lumière

M : le point d'observation.

$(SM)_2$: chemin optique après réflexion en B : $\boxed{(SM)_2 = (SA)+(AB)+(BA)+(AM)}$

$(SM)_1$: chemin optique après réflexion en A : réflexion air-eau et noir < neau

alors : $\boxed{(SM)_1 = (SA)+(AM)+\frac{\lambda_0}{2}}$.

$$\Rightarrow (SM)_2-(SM)_1 = (SA)+(AB)+(BA)+(AM)-(SA)-(MA)-\frac{\lambda_0}{2}$$

$$= 2ne - \frac{\lambda_0}{2}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = \frac{4\pi ne}{\lambda_0} - \pi}$$

2. L'intensité observée est maximale pour une onde monochromatique λ_0, si $\boxed{\Delta\varphi = 2p\pi \text{ (ondes en phase)}}$.

$$\Rightarrow \frac{4\pi ne}{\lambda_0} - \pi = 2p\pi \qquad p \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_0} = \frac{(2p+1)}{4ne} \Rightarrow \boxed{\lambda_0 = \frac{4ne}{(2p+1)} \cdot p \in \mathbb{N}.}$$

3. L'onde réfléchie est colorée s'il existe un seul maximum dans le domaine optique. (pour une onde monochromatique).

La relation précédente donne : $\frac{1}{\lambda_0} = \frac{p}{2ne} + \frac{1}{4ne}$.

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\left(\frac{1}{\lambda_0}\right) = \frac{\Delta p}{2ne}}.$$

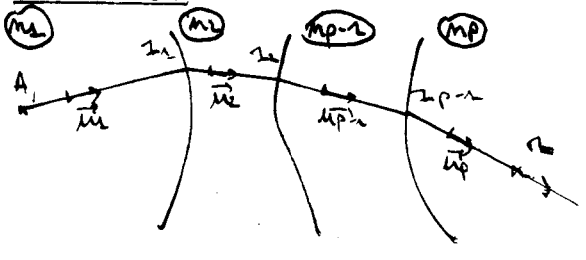
Un unique maximum d'intensité dans le domaine optique si et seulement si :

$$\boxed{\frac{1}{\lambda_{violet}} - \frac{1}{\lambda_{rouge}} = \frac{1}{2ne}} \quad (\Delta p = 1).$$

$$\Rightarrow \boxed{e = \left(\frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{\lambda_{viol}} - \frac{1}{\lambda_{rouge}}\right)^{-1}}.$$

A.N. : $e = \frac{1}{2\times 1{,}3}\left(\frac{1}{400} - \frac{1}{800}\right)^{-1} \Rightarrow \boxed{e = 0{,}4\ \mu m.}$

Exercice 8 :

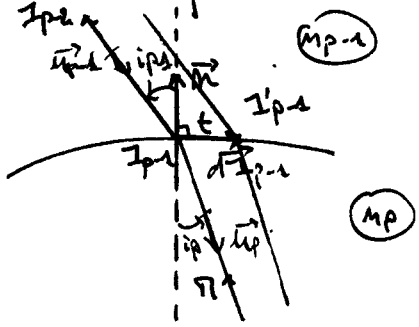


1. Par définition le chemin optique :

$$\boxed{L(M) = n_1\vec{u_1}\cdot\vec{AI_1} + n_2\vec{u_2}\cdot\vec{I_1I_2} + \dots + n_p\vec{u_p}\cdot\vec{I_{p-1}M}}$$

$$= (AI_1)+(I_1I_2)+\dots+(I_{p-1}M).$$

2- Zoom sur le dioptre entre les milieux d'indice n_{p-1} et n_p.



On note $\vec{n}$ le vecteur normal au dioptre de n_p vers n_{p-1} et $\vec{t}$ le vecteur tangent à la surface du dioptre en I_{p-1}.

$$\boxed{d\vec{I}_{p-1} = dI_{p-1}\,\vec{t}.}$$

La loi de Descartes sur la réfraction s'exprime en I_{p-1}.

$$n_{p-1}\sin(i_{p-1}) = n_p \sin(i_p) \quad (\alpha).$$

Décomposons $\vec{u}_{p-1}$ et $\vec{u}_p$ sur $\vec{n}$ et $\vec{t}$: $\boxed{\begin{aligned}\vec{u}_{p-1} &= -\cos(i_{p-1})\,\vec{n} + \sin(i_{p-1})\,\vec{t} \\ \vec{u}_p &= -\cos(i_p)\,\vec{n} + \sin(i_p)\,\vec{t}\end{aligned}}$

Alors : $n_{p-1}\vec{u}_{p-1} = -n_{p-1}\cos(i_{p-1})\,\vec{n} + n_{p-1}\sin(i_{p-1})\,\vec{t}$

$n_p \vec{u}_p = -n_p\cos(i_p)\,\vec{n} + n_p \sin(i_p)\,\vec{t}$

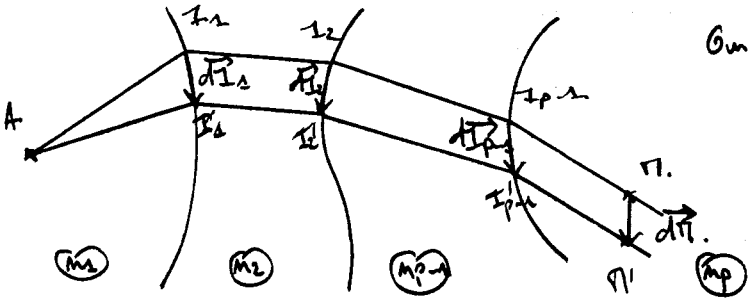
Si équation (α) donne $n_p\sin(i_p) - n_{p-1}\sin(i_{p-1}) = 0$.

$$\Rightarrow n_p\vec{u}_p - n_{p-1}\vec{u}_{p-1} = -\left(n_p\cos(i_p) - n_{p-1}\cos(i_{p-1})\right)\vec{n}.$$

Donc pour tout $i \in [\![1; p-1]\!]$

$n_i\vec{u}_i - n_{i+1}\vec{u}_{i+1}$ est normale au dioptre.

$$\Rightarrow \boxed{(n_i\vec{u}_i - n_{i+1}\vec{u}_{i+1})\cdot d\vec{I}_i = 0.}$$



On a déjà : $L(\Pi) = n_1\vec{u}_1\cdot\vec{A'I}_1 + n_2\vec{u}_2\cdot\vec{I_1'I_2} + \dots$

$+ n_{p-1}\vec{u}_{p-1}\cdot\vec{I_{p-2}'I_{p-1}}$

$+ n_p\vec{u}_p\cdot\vec{I_{p-1}'\Pi}$

Alors : $dL(\Pi) = n_1 d(\vec{u}_1\cdot\vec{A'I}_1) + n_2 d(\vec{u}_2\cdot\vec{I_1'I_2}) + \dots + n_{p-1}\,d(\vec{u}_{p-1}\cdot\vec{I_{p-2}'I_{p-1}}) + n_p\,d(\vec{u}_p\cdot\vec{I_{p-1}'\Pi})$.

On a $d(\vec{u}_i\cdot\vec{I_{i-1}'I_i}) = d\vec{u}_i\cdot d(\vec{I_{i-1}'I_i})$.

* Par construction $\boxed{d(\vec{I_{i-1}'I_i}) = (d\vec{I}_i - d\vec{I}_{i-1}).}$

* $\vec{u}_i = -\cos i\,\vec{n} + \sin i\,\vec{t}$. $\Rightarrow d\vec{u}_i = d(-\cos i\,\vec{n} + \sin i\,\vec{t}) = -d\cos i\,\vec{n} + d\sin i\,\vec{t}$

$= (\sin i\,\vec{n} - \cos i\,\vec{t})\,di$.

Alors $d\vec{u}_i$ est orthogonal à $\vec{u}_i$, donc à $\vec{I_{i-1}'I_i}$.

Alors : $dL(\Pi) = n_0\, d\vec{u}_0 \cdot \vec{I_0 I'_0} + n_0 \vec{u}_0 \cdot (d\vec{I'_0} - d\vec{A}) + \dots + n_i\, d\vec{u}_i \cdot \vec{I_{i-1} I_i} + n_i \vec{u}_i \cdot (d\vec{I'_i} - d\vec{I'_{i-1}})$

$+ \dots + n_p\, d\vec{u}_p \cdot \vec{I_{p-1} I'_{p-1}} + n_p \vec{u}_p \cdot (d\vec{\Pi} - d\vec{I'_{p-1}})$.

A est immobile : $d\vec{A} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \underline{dL = n_0 \vec{u}_0 \cdot \vec{I_0 I'_0} + \dots + n_i \vec{u}_i (d\vec{I'_i} - d\vec{I'_{i-1}}) + \dots + n_p \vec{u}_p \cdot (d\vec{\Pi} - d\vec{I'_{p-1}})}.$$

Or la question 2.i permet d'annuler les termes :

$$\underline{d\vec{I_i} \cdot (n_i \vec{u}_i - n_{i+1} \vec{u}_{i+1}) = 0}.$$

$$\Rightarrow \boxed{dL = n_p \vec{u}_p \cdot d\vec{\Pi}}.$$

Retour sur la relation : $d(\vec{I_i I_{i+1}}) = d\vec{I}_{i+1} - d\vec{I}_i$

On travaille dans le plan (x, y). Les coordonnées de I_i et I_{i+1} sont :

$$I_i \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{vmatrix} \text{ et } I_{i+1} \begin{vmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{I_i I_{i+1}} \begin{vmatrix} x_i - x_{i+1} \\ y_i - y_{i+1} \\ 0 \end{vmatrix}$$

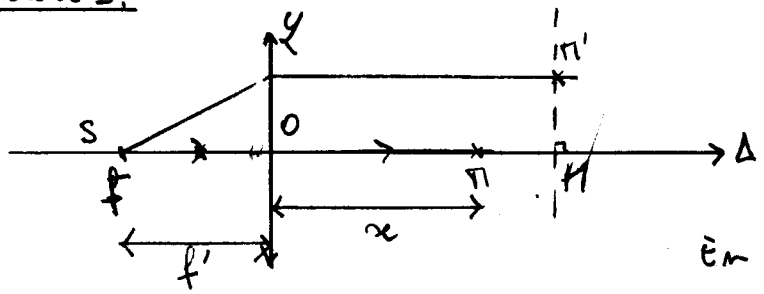
$$\Rightarrow d\vec{I_i I_{i+1}} \begin{vmatrix} dx_i - dx_{i+1} = d\vec{I}_{i+1} - d\vec{I}_i \\ dy_i - dy_{i+1} \\ 0 \end{vmatrix}$$

3. Si Π et Π' sont sur la même surface d'onde ; alors le chemin optique est le même sur les deux trajets : $dL = 0$.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{u}_p \cdot d\vec{\Pi} = 0 \Rightarrow \vec{u}_p \perp d\vec{\Pi}} \text{ et } d\vec{\Pi} \text{ appartient à la surface d'onde.}$$

Alors les rayons lumineux sont orthogonaux aux surfaces d'onde.

Exercice 4 :



1- Le rayon SΠ parcourt dans l'air la distance $f' + x$ l'on ôte la lentille.

En x présence, sur la distance $f + x$ e est parcourue dans le verre et pas dans l'air.

Alors : $(S\Pi) = n_{air}(f' + x) - n_{air} \times e + n \times e$

$$\boxed{(S\Pi) = n_{air}(f + x) + (n - n_{air}) \times e}.$$

Après la lentille les surfaces d'onde sont des plans. Donc Π' et H sont sur une même surface d'onde.

D'après le théorème de Malus, $(S\Pi') = (SH)$.

Comme précédemment : $(SH) = n_{air}(f' + x') + (n - n_{air}) \times e$.

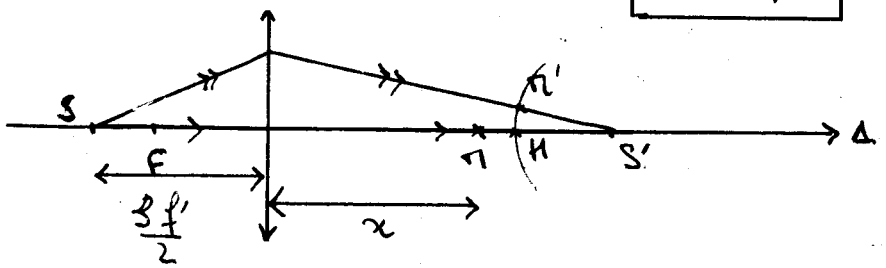
$$\boxed{(S\Pi') = n_{air}(f' + x') + (n - n_{air}) \times e.}$$

3. Pour $\overline{OS} = \frac{3f'}{2}$ on cherche le point S' image de S par L.

La relation de conjugaison de Descartes donne :

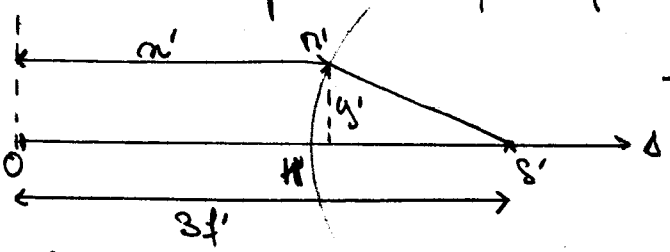
$$\frac{1}{\overline{OS'}} - \frac{1}{\overline{OS}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{OS'}} = \frac{1}{f'} - \frac{2}{3f'} = \frac{1}{3f'}$$

$$\Rightarrow \boxed{OS' = 3f'.}$$



Le calcul de $(S\Pi)$ ne change pas du précédent. $\boxed{(S\Pi) = n_{air}\left(\frac{3f'}{2} + x'\right) + (n - n_{air}) \times e.}$

Les surfaces d'onde après la lentille sont des sphères de centre S'. Soit H le point d'intersection de la surface d'onde passant par Π' et de Δ.



$\underline{S'\Pi' = S'H}$ (Π' et H sur le même cercle de centre S').

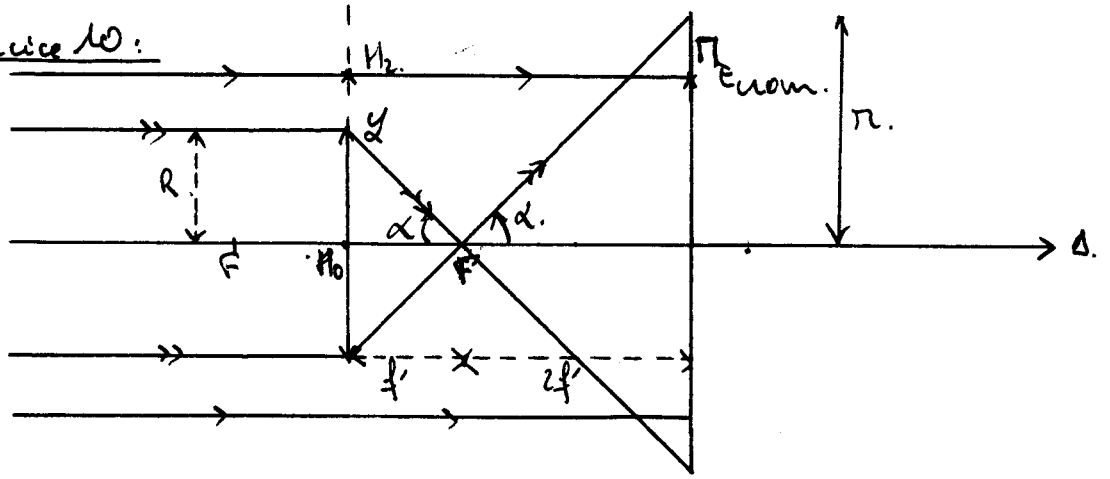
$S'\Pi'^2 = (3f' - x')^2 + y'^2 \Rightarrow S'\Pi' = \sqrt{(3f' - x')^2 + y'^2} \Rightarrow S'H = \sqrt{(3f' - x')^2 + y'^2}$.

$$\Rightarrow \boxed{OH = 3f' - \sqrt{(3f' - x')^2 + y'^2}}$$

Alors : $(S\Pi') = (SH) = n_{air}\left(\frac{3f'}{2} + 3f' - \sqrt{(3f' - x')^2 + y'^2}\right) + (n - n_{air}) \times e.$

$$\boxed{(S\Pi') = n_{air}\left(\frac{9f'}{2} - \sqrt{(3f' - x')^2 + y'^2}\right) + (n - n_{air}) \times e.}$$

Exercice 10 :



Les rayons limites émergeant de la lentille, interceptent l'écran avec un angle α. Alors la distance maximale sur l'écran, atteinte par les rayons issues de la lentille est : r_{lim} tq :

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{r_{lim}}{2f'}}$$

De plus $\tan\alpha = \frac{R}{f'}$ $\Rightarrow \frac{R}{f'} = \frac{r_{lim}}{2f'} \Rightarrow r_{lim} = 2R$.

Alors la couronne de l'écran atteint par les deux rayons faisceaux est une couronne de rayon r tq $\boxed{R < r < 2R}$.

Soit Π un point de l'écran à distance $r \in [R ; 2R]$ de l'axe optique.

$$\boxed{\Delta C(\Pi) = \frac{2\pi\delta(\Pi)}{\lambda}} \quad \text{par définition.}$$

$$\delta(\Pi) = (S\Pi)_2 - (S\Pi)_1 = (SH_2) + (H_2\Pi) - (SH_1) - (H_1\Pi).$$

Or d'après le théorème de Malus : H_2, H_1 et H_0 sont sur la même plan de phase.

Alors, $\boxed{(SH_2) = (SH_1) = (SH_0).}$

$$\Rightarrow \delta(\Pi) = (SH_2) + (H_2\Pi) - (SH_0) - (H_0\Pi)$$

$$= (H_2\Pi) - (H_0\Pi).$$

De plus $\boxed{(H_2\Pi) = 3f'}$ et $(H_0\Pi) = (H_0F') + (F'\Pi)$.

Or une partie du chemin optique (H_0F') est parcourue dans le verre, d'indice n sur une épaisseur e.

« Sur la longueur $H_0F' = f'$ pour une lentille mince e., il faut retirer e parcourue dans le verre et non pas dans l'air.

« Il faut alors ajouter $n \times e$ parcourue dans le verre.

$$\Rightarrow (H_0 F') = f' - e + n \times e = f' + (n-1) \times e.$$

De plus $(F'\Pi) = \text{mesure} \times F'\Pi = F'\Pi \sqrt{(2f')^2 + x^2}$

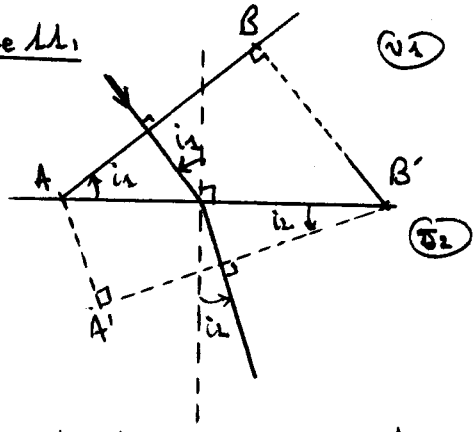
$$\Rightarrow \delta(\Pi) = 3f' - \left\{ f' + (n-1) \times e + \sqrt{(2f')^2 + x^2} \right\}.$$

$$= 2f' - (n-1)e - \sqrt{(2f')^2 + x^2}$$

$$= 2f' \left\{ 1 - \frac{(n-1)e}{2f'} - \sqrt{1 + \frac{x^2}{(2f')^2}} \right\}.$$

Plus finalement : $$\boxed{\Delta\varphi(\Pi) = \frac{4\pi f'}{\lambda} \left\{ 1 - \frac{(n-1)e}{2f'} - \sqrt{1 + \frac{x^2}{(2f')^2}} \right\}}$$

Exercice 11 :



Entre les dates t et $t + \delta t$ le point A a parcouru la distance : $\boxed{AA' = v_2 \times \delta t}$.

Le point B a parcouru la distance $\underline{BB' = v_1 \times \delta t}$.

$\boxed{\text{Or } v_2 < v_1 \Rightarrow AA' < BB'.}$

$\boxed{\text{Le rayon réfracté se rapproche de la normale.}}$

Par construction : • $AB' = \text{cte}$.

• $\widehat{AB'A} = i_1$ et $\widehat{BAB'} = i_2$.

• Dans le triangle rectangle ABB', rectangle en B' : $\dfrac{BB'}{\sin i_2} = AB'$.

• Dans le triangle rectangle B'A'A, rectangle en A' : $\dfrac{AA'}{\sin i_1} = AB'$.

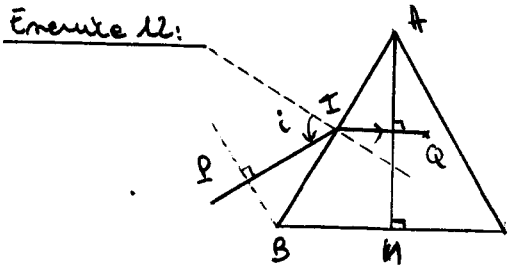
$$\Rightarrow \frac{BB'}{\sin i_2} = \frac{AA'}{\sin i_1} \Rightarrow \boxed{BB' \sin i_1 = AA' \sin i_2}.$$

$$\Rightarrow v_1 \cancel{\delta t} \sin i_1 = v_2 \cancel{\delta t} \sin i_2$$

Or par définition $\boxed{n_1 = \dfrac{c}{v_1} \text{ et } n_2 = \dfrac{c}{v_2}} \Rightarrow \dfrac{c}{n_1} \sin i_1 = \dfrac{c}{n_2} \sin i_2$

$$\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.}$$

Exercice 12 :



1- Par construction, si le rayon réfracté est à l'orthogonal à AH, alors l'angle de réfraction est : $\dfrac{\hat{A}}{2} = i_2$.

La deuxième loi de Snell-Descartes :

$$\text{donc } \sin i = n \times \sin i_2.$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin i = n \times \sin\frac{A}{2}} \rightarrow i = \arcsin\left(n \sin\frac{A}{2}\right).$$

Or $A = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{\pi}{6}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow \boxed{\sin i = \frac{n}{2}}$$

2. $(I_2 Q) = (I_2 I) + (I Q)$ et $(I_2 I) = \min \times I_2 I$

$$(I_2 Q) = n \times I Q.$$

« Théorème de Thalès : $\frac{IQ}{BH} = \frac{AI}{AB}$ or $AB = 2BH \Rightarrow \underline{IQ = \frac{\alpha}{2}.}$

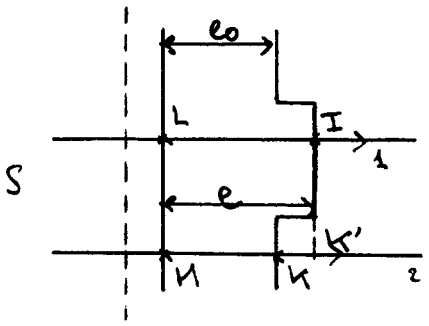
« Dans le triangle rectangle $I_2 B$, rectangle en I_2 : $\boxed{I_2 I = (\alpha - n)\sin i}$

$$\Rightarrow (I_2 Q) = (\alpha - n)\sin i + \frac{n\alpha}{2}. \quad \text{or } \sin i = \frac{n\alpha}{2}.$$

$$\boxed{(I_2 Q) = \frac{n\alpha}{2}.}$$

Le chemin optique est indépendant de α. En effet $I_2 B$ et $A Q H$ sont des plans d'indices. Donc le chemin optique est indépendant du chemin géométrique.

Exercice 13 :



1. On note S la point source à l'infini et I la point d'observation.

$$\Delta\varphi(P) = \frac{2\pi\,\delta(P)}{\lambda}$$

« 2.

$$\delta(P) = (SP)_1 - (SP)_2.$$

$$(SP)_1 = (SL) + (LI) + (IP).$$

$$(SP)_2 = (SH) + (HK) + (KK') + (K'P).$$

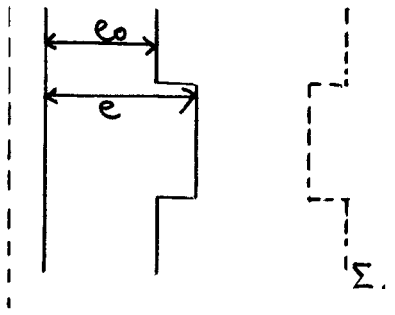
On d'après le théorème de Malus, et les milieux étant homogènes et isotropes :

$$\boxed{(SL) = (SH);\quad (IP) = (K'P)}$$

$$\Rightarrow \delta(P) = (LI) - (HK) - (KK').$$

$$= ne - \{ne_0 + (e - e_0)\}. \Rightarrow \delta(P) = (n-1)(e - e_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\varphi(P) = \frac{2\pi(n-1)(e-e_0)}{\lambda}}$$



2. L'objet est totalement transparent, le défaut n'est pas observable avec un montage d'optique géométrique. C'est un objet de phase.

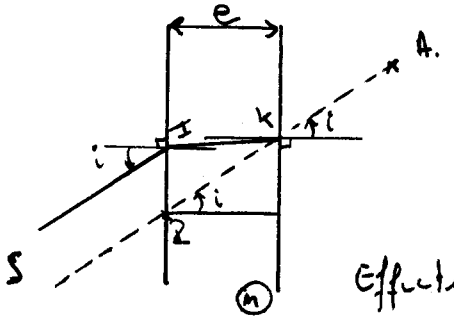
3. Un contact optique d'un Michelson : l'épaisseur est $a=0$ et l'angle d'incidence sur les miroirs : $\alpha=0$.

L'éclairement est donc uniforme sur l'écran, et maximal.

Placer la lame contre le miroir M_1, le faisceau 1 est diffusé de $2\alpha\ell$ en arrivant sur l'écran par rapport au faisceau 2.

> Alors l'éclairement change sur l'écran : à condition que $2\alpha\ell \neq 2p\pi$ et $2ne < L_c$ longueur de cohérence de la source.
>
> Le défaut devient visible.

Exercice 14 :



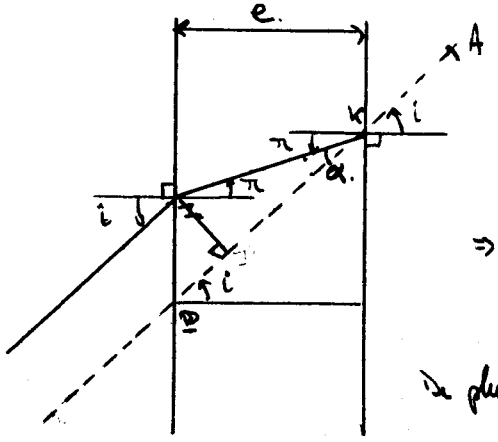
2. $\delta_{lame} = (SA)_{avec\ lame} - (SA)_{sans\ lame}$.

$(SA)_{sans\ lame} = (SI) + (IK) + (KA)$.

$(SA)_{avec\ lame} = (SI) + (IK) + (KA)$.

$\Rightarrow \delta_{lame} = (SI) + (IK) - (SI) + (IK)$.

Effectuons un agrandissement de zone intéressante :



Les points I et I' sont sur un même plan d'onde. Alors d'après le théorème de Malus :

$\underline{(SI) = (SI')}$.

$\Rightarrow \delta_{lame} = (SI) + (IK) + (KA) - (SI') - (I'K) - (KA)$.

$= (IK) - (I'K)$.

De plus $(IK) = n \times IK$. et $(I'K) = I'K$.

Par construction : $IK = \frac{e}{\cos r}$ et $I'K = IK \cos\alpha$. et $\alpha = i - r$.

$$\Rightarrow \boxed{I'K = e\,\frac{\cos(i-r)}{\cos(r)} = e\,\frac{\cos i \cos r + \sin i \sin r}{\cos r}}$$

De plus la seconde loi de Descartes donne : $\sin i = n \times \sin r$.

$$\delta_{lame} = \frac{ne}{\cos r} - e\left(\frac{\cos i \cos r + \sin i \sin r}{\cos r}\right)$$

(11)

$$= \frac{ne}{\cos r} - ne\frac{\sin^2 r}{\cos r} - e\cos i$$

$$= e\left\{\frac{n}{\cos r}(1-\sin^2 r)\right\} - e\cos i.$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_{lame} = e(n\cos r - \cos i).}$$

Pour $i = 0$ $\cos i = 1$ et $\cos r = 1$ $\Rightarrow \delta_{lame} = e(n-1)$ on retrouve le cas de l'incidence normale.

3 - Pour i << très petit si $\boxed{\cos i \simeq 1 - \frac{i^2}{2}}$ et $\cos r \simeq 1 - \frac{r^2}{2}$ au deuxième ordre.

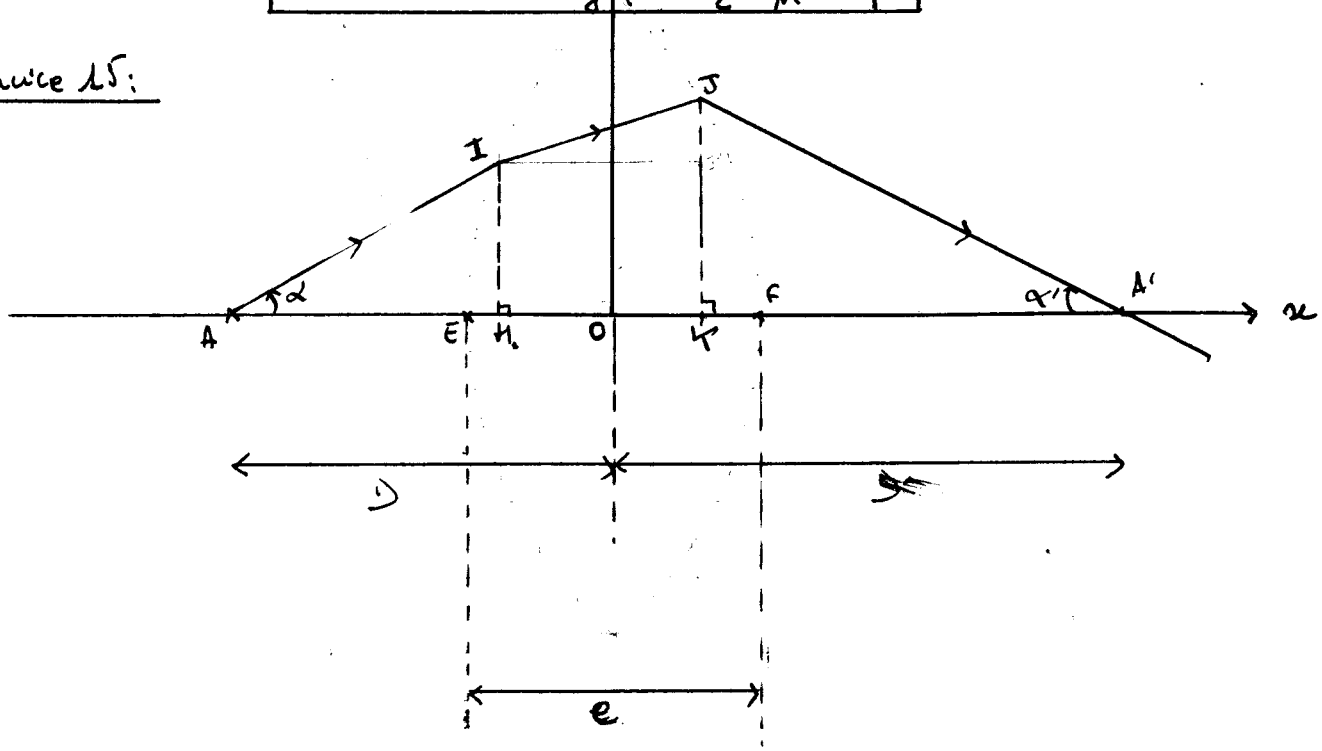
$$\Rightarrow \delta_{lame} = e\left\{n\left(1-\frac{r^2}{2}\right) - n\cos r\left(1-\frac{i^2}{2}\right)\right\}.$$

$$= e\left\{n - \frac{nr^2}{2} - n\cos r + n\cos r\frac{i^2}{2}\right\}.$$

$$= e\left\{n - n\cos r) - \frac{nr^2}{2} + n\cos r\frac{i^2}{2}\right\}. \quad \text{et } r \simeq \frac{\sin i}{n} \Leftrightarrow n\sin r = \sin i$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_{lame} = e(n - n\cos r)\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{\sin^2 i}{n}\right\}}.$$

Exercice 15:



1 - On note φ_A la phase au point A. Alors : $\boxed{\varphi_I - \varphi_A = \frac{2\pi (AI)}{\lambda}}$

On $\boxed{(AI) = \text{min} < AI.}$

Le théorème de Pythagore : $AI^2 = AH^2 + HI^2$.

$$HI = y \quad \text{et} \quad AH = D - x.$$

$$\Rightarrow \quad AI^2 = (D-x)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + D^2 - 2Dx.$$

$$\Rightarrow \quad AI = \sqrt{x^2 + y^2 + D^2 - 2Dx}$$

On se place dans les conditions de Gauss, α « très petit ».

$\Rightarrow \tan\alpha \ll 1$ et $\tan\alpha = \frac{y}{D-x} \Rightarrow y \ll D - x \Rightarrow \underline{y \ll D.}$

De plus $\tan\alpha = \frac{x}{y} \Rightarrow x \ll y \Rightarrow \underline{x \ll D.}$

Alors $\boxed{AI = D\sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2 - 2Dx}{D^2}}}$ A l'ordre 1 :

$$AI \simeq D\left(1 + \frac{x^2 + y^2 - 2Dx}{2D^2}\right) = D + \frac{x^2 + y^2 - 2Dx}{2D}.$$

Finalement : $\boxed{\varphi_I = \varphi_A + \frac{2\pi}{\lambda}\left(D + \frac{x^2 + y^2 - 2Dx}{2D}\right).}$

2 - $\varphi_J - \varphi_{A'} = \frac{2\pi}{\lambda}(A'J)$. On $(A'J) = \text{min} < A'J$. Le théorème de Pythagore :

$$A'J^2 = A'K^2 + KJ^2.$$

Hypothèse lentille mince : $\begin{cases} KJ \simeq HJ \simeq y. \\ OK \simeq OH \simeq x. \end{cases}$ $\Rightarrow A'J^2 = (D' - x)^2 + y^2$

$$\Rightarrow A'J = \sqrt{x^2 + y^2 + D'^2 - 2D'x}$$

6 Conditions de Gauss : $\begin{cases} x \ll D' \\ y \ll D' \end{cases}$ on fait le même développement limité à l'ordre 1 :

$$A'J = D' + \frac{x^2 + y^2 - 2D'x}{2D'}$$

$$\boxed{\varphi_J = \varphi_{A'} - \frac{2\pi}{\lambda}\left(D' + \frac{x^2 + y^2 - 2D'x}{2D'}\right).}$$

3 - $\boxed{\varphi_{A'} - \varphi_A = \frac{2\pi}{\lambda}(AA')}$ et $(AA') = (AE) + (EF) + (FA')$.

$$= D - \frac{e}{2} + ne + D' - \frac{e}{2} = D + D' + e(n-1).$$

$$\boxed{\varphi_{A'} - \varphi_A = \frac{2\pi}{\lambda}\left\{ D + D' + e(n-1) \right\}.}$$

4. $\varphi_{A'} - \varphi_A = \varphi_{A'} - \varphi_S + \varphi_S - \varphi_I + \varphi_I - \varphi_A$.

$$= \frac{2\pi}{\lambda}\left\{ D' + \frac{x^2+y^2-2D'x}{2D'} \right\} + \varphi_S - \varphi_I + \frac{2\pi}{\lambda}\left\{ D + \frac{x^2+y^2-2Dx}{2D} \right\}.$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{A'} - \varphi_A = \frac{2\pi}{\lambda}\left\{ D' + D + \frac{x^2+y^2-2D'x}{2D'} + \frac{x^2+y^2-2Dx}{2D} \right\} + \varphi_S - \varphi_I.$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_S - \varphi_I = \frac{2\pi}{\lambda}\left\{ \cancel{D} + \cancel{D'} + e(n-1) - \cancel{D} - \cancel{D'} - \frac{x^2+y^2-2D'x}{2D'} - \frac{x^2+y^2-2Dx}{2D} \right\}.$$

$$\varphi_S - \varphi_I = \frac{2\pi}{\lambda}\left\{ e(n-1) - \frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{D} + \frac{1}{D'}\right) + 2x \right\}.$$

La relation de conjugaison de Descartes : $\boxed{\frac{1}{D'} + \frac{1}{D} = \frac{1}{f'}.}$

De plus l'hypothèse lentille mince se traduit $\boxed{2x \simeq e.}$

$$\Rightarrow \varphi_S - \varphi_I = \frac{2\pi}{\lambda}\left\{ e(n-1) - \frac{x^2+y^2}{2f'} + e \right\}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_S - \varphi_I = -\frac{2\pi}{\lambda}\left\{ \frac{x^2+y^2}{2f'} - ne \right\}.}$$