Travaux dirigés 1

Systèmes linéaires - Stabilité

Questions de cours

1. Définir les termes suivant : système linaire, système continue, système invariant.
2. Qu'est-ce qu'un filtre linéaire ? Donner les fonctions de transferts canonique des filtres : passe-bas et passe-haut d'ordre 1.
Passe-bas, passe-haut, passe-bande d'ordre 2.
3. Définir ce qu'est un diagramme de Bode. Définir le gain en décibel ainsi que la phase d'un filtre linéaire.
4. Quel est l'effet d'un filtre linéaire sur une tension périodique ? Comment réaliser un moyenneur ? un intégrateur ?
5. Etablir les conditions de stabilité d'un système linéaire d'ordre 1 ; d'ordre 2.

Calculs

Calcul 1 :

Considérons un nombre complexe de la forme $\underline{z} = a + i.b$ avec a et b des nombres réels.
1. Mettre $\underline{z}$ sous forme exponentielle. Identifier alors l'argument et le module de $\underline{z}$.
2. Identifier la phase et le module de $\underline{z}_1 = 1 + i\sqrt{12}$, $\underline{z}_2 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}.i$, $\underline{z}_3 = 4 - 4.i$, $\underline{z}_4 = \dfrac{2 + i.\sqrt{3}}{1 + 2.i}$.
3. Représenter : $\underline{z}_1$, $\underline{z}_2$, $\underline{z}_3$ et $\underline{z}_4$ sur un cercle trigonométrique.
4. Mettre sous forme cartésienne les complexes suivant : $2.e^{i\pi/4}$, $5.e^{-i\pi/6}$.

Calcul 2 :

Calculer les intégrales suivantes pour lesquelles $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$:

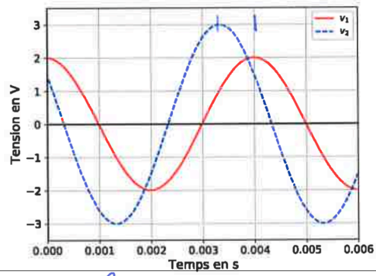
1. $a_n = \dfrac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0}(-3).\cos(n.\omega.t).dt + \int_{0}^{T/2} 4.\cos(n.\omega.t).dt\right)$

2. $b_n = \dfrac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0}(-3).\sin(n.\omega.t).dt + \int_{0}^{T/2} 4.\sin(n.\omega.t).dt\right)$.

3. $c_n = \dfrac{2}{T}\left(\int_{0}^{T/2}\left(\dfrac{-20}{T}.t + 5\right)\cos(n\omega.t).dt + \int_{T/2}^{T}\left(\dfrac{20}{T}.t - 15\right)\cos(n\omega.t).dt\right)$

4. $d_n = \dfrac{2}{T}\left(\int_{0}^{T/2}\left(\dfrac{-20}{T}.t + 5\right)\sin(n\omega.t).dt + \int_{T/2}^{T}\left(\dfrac{20}{T}.t - 15\right)\sin(n\omega.t).dt\right)$

Calcul 3 :



On considère les 2 tensions sinusoïdales représentées ci-contre.
1. Pour chaque signal relever l'amplitude, la période, la fréquence.
2. La tension v_2 est-elle en avance ou en retard par rapport à la tension v_1 ? Calculer le déphasage $\varphi_{2/1}$.
3. Pour chaque signal calculer la phase à l'origine. Vérifier la cohérence des résultats avec la question précédente.
4. Indiquer la forme analytique de chaque signal.

Calcul 4 :

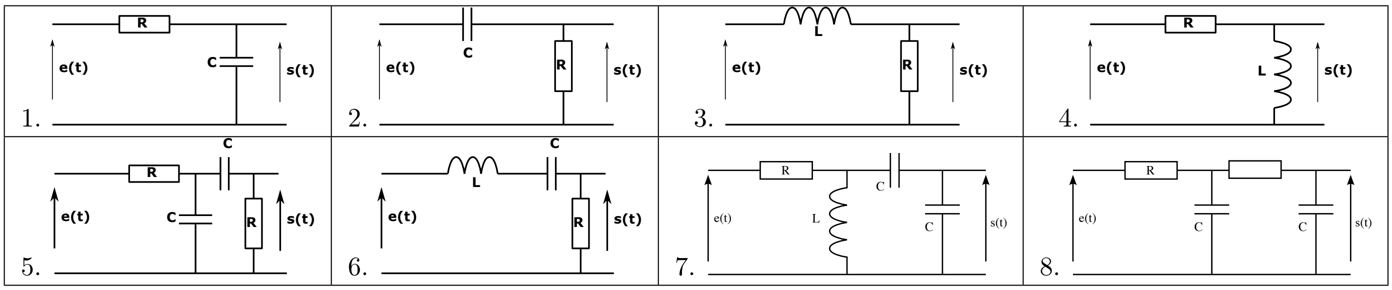
Résoudre l'équation différentielle suivante et tracer l'évolution temporelle de la solution :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 . x = 0$$

les conditions initiales étant : $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$

Niveau I

Exercice 1 ♦♦♦



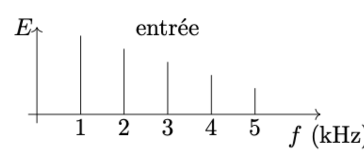
1. Pour les filtres **1**, **3**, **6** et **7**, déterminer l'expression de la fonction de transfert et en déduire l'équation différentielle.
2. Pour les filtres **2**, **4**, **5** et **8**, déterminer l'équation différentielle et en déduire la fonction de transfert.
3. Discuter la stabilité de chacun de ces systèmes.
4. Pour les filtres **1**, **4**, **6** et **7** tracer les diagrammes de Bode.

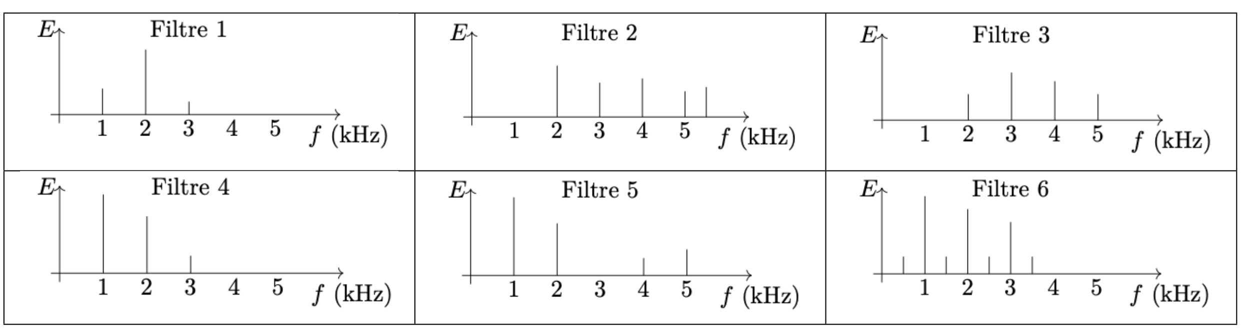
Exercice 2 ♦♦♦ : Caractéristique d'un filtre

On envoie en entrée de différentes filtres le signal $e(t)$ dont le spectre en amplitude est représenté ci-contre. On procède à l'analyse spectrale du signal de sortie pour chacun des filtres et on obtient les spectres ci-dessous.

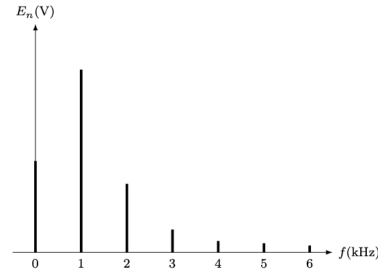
1. Quel sont les filtres non linéaire ?

2. Caractériser les filtres linéaires et donner un ordre de leur fréquence de coupure (1ier ordre) ou de leur fréquence propre et de leur facteur de qualité (passe-bande).





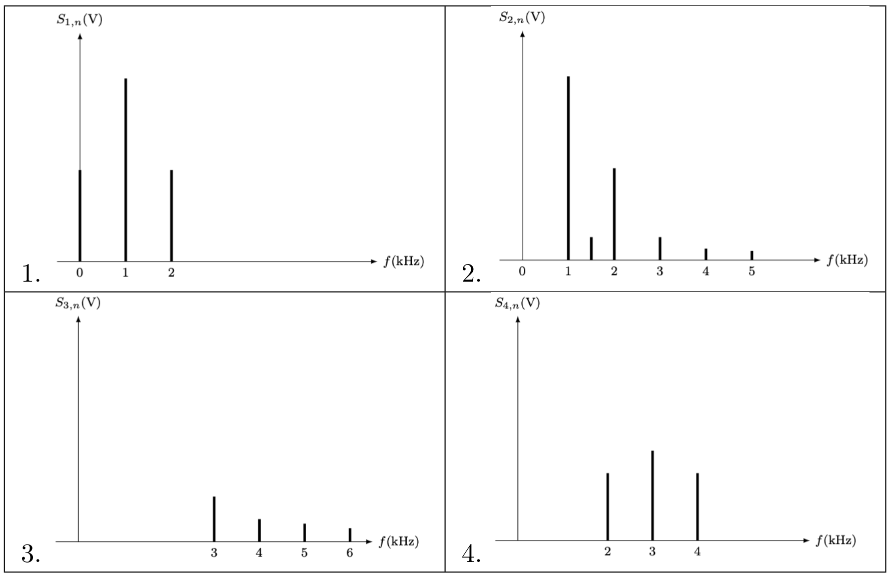
Exercice 3 ◆◆◆ : Caractéristique d'un filtre



On envoie en entrée de différentes filtres le signal $e(t)$ dont le spectre en amplitude est représenté ci-contre. On procède à l'analyse spectrale du signal de sortie pour chacun des filtres et on obtient les spectres ci-dessous.

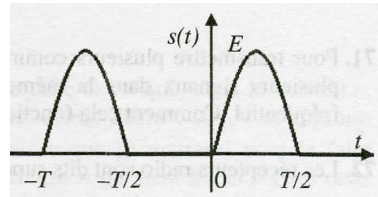
1. Quel sont les filtres non linéaire ?

2. Déterminer la nature des systèmes identifiés comme linéaires ainsi que l'ordre de grandeur de leur bande passante en supposant les filtres idéaux.



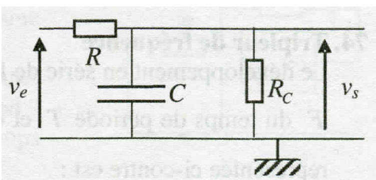
Exercice 4 ♦♦♦ : Filtrage d'un signal périodique

Le signal s (nommé tension redressée monoalternance) est une fonction périodique de période T du temps et de fréquence $f = 50\,\text{Hz}$. $s(t) = 0$ pour $t \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right]$ et $s(t) = E.\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ pour $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$.



1. Donner les expressions et valeurs numériques de la période fondamentale T et de la pulsation fondamentale ω de $s(t)$.
Le développement en série de Fourier de s est donné :

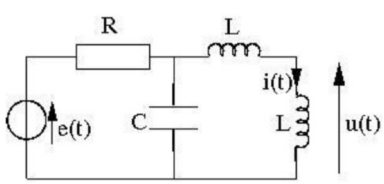
$$s(t) = E\left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(\omega.t)\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos(2\omega t) + \frac{1}{15}\cos(4\omega.t)... + \frac{1}{n^2-1}\cos(n.\omega.t) + ...\right)\right]$$



2. Pour le filtre ci-contre avec $C = 10000\,\mu\text{F}$, $R = 10\,\Omega$, $R_c = 10\,\Omega$.
Trouver sa fonction de transfert, son gain statique G_0, et sa pulsation de coupure ω_c.
3. On injecte la tension $s = v_e$ à l'entrée du filtre précédent. Décrire précisément le spectre de la tension de sortie v_s.
4. Le taux d'ondulation τ de v_s est le rapport de l'amplitude de la partie variable de v_s à sa valeur moyenne.
Calculer τ en justifiant que la partie variable peut en première approximation être assimilée au premier harmonique non nul. Faire l'application numérique. Représenter l'allure de v_s.
5. Quelle application peut-on imaginer à cela sachant que l'on peut facilement obtenir, grâce à une diode de redressement, un signal de la forme de s à partir d'une tension alternative ?

Niveau II

Exercice 5 ♦♦♦ : Filtre de Hartley



1. Quelle est la nature de ce filtre ?
2. Calculer sa fonction de transfert et la mettre sous forme canonique. On exprimera les paramètres de la forme canonique en fonction des éléments du circuit.
3. Donner les expressions de la (ou des) pulsation(s) de coupure et de la bande passante.
4. Tracer son diagramme de Bode.

Exercice 6 ♦♦♦ : Stabilité des systèmes

On note $\underline{\mu} = \dfrac{\mu_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$. Considérons une fonction de transfert s'écrivant :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{-\underline{\mu}.\underline{Z}_2}{(\underline{\mu}+1)\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad (1)$$

Déterminer la fonction de transfert canonique et en déduire l'équation différentielle si

1. $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ sont des résistances R_1 et R_2.
2. $\underline{Z}_1$ est une résistance R et $\underline{Z}_2$ un condensateur C.
3. $\underline{Z}_2$ est une résistance R et $\underline{Z}_1$ un condensateur C.
4. Discuter la stabilité de chacun des systèmes.

Exercice 7 ◆◆◇ : Stabilité d'un système particulier du 4ième ordre

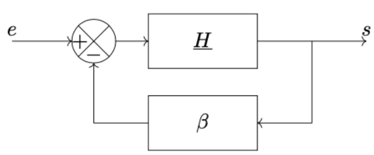
On considère un système linéaire particulier pour lequel, lorsque le signal d'entrée est nul, l'évolution du signal de sortie $s(t)$ est régie par l'équation différentielle :

$$a_4 \frac{d^4 s}{dt^4} + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + a_0 = 0 \qquad (2)$$

où les coefficients a_0, a_2 et a_4 sont des grandeurs réelles constantes non nulles. Trouver les conditions sur ces coefficients pour que ce système soit stable.
On précise que ceci ne demande aucune connaissance sur l'équation du quatrième degré.

Exercice 8 ◆◆◆ : Stabilité et schéma-bloc

On considère le shcéma-bloc suivant liant l'entrée $e(t)$ à la sortie $s(t)$:



avec $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\tau.\omega}$ avec $\tau > 0$ et β une constante réelle.

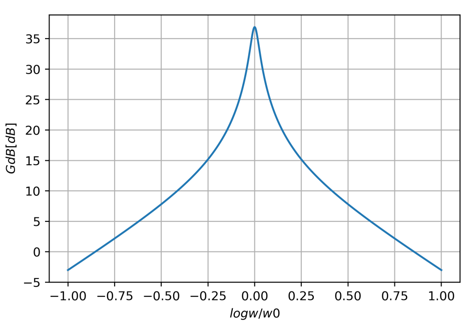
1. Déteminer la fonction de transfert du système $\dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$.

2. Discuter de la stabilité selon la valeur de β.

3. On se place dans le cas $\beta = -1$. Déterminer le lien entre $e(t)$ et $s(t)$ et commenter.

4. On se replace dans le cas β quelconque. Pour un signal d'entrée nul $e(t) = 0$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$. En déduire $s(t)$ en prenant $s(0) = S_0$. Retrouver alors le résultat de la question **2.**

Exercice 9 : Filtrage *Banque PT 2015*



On étudie un filtre caractérisé par le diagramme de gain en décibel ci-contre.

1. De quel type de filtre s'agit-il ? Donner la forme canonique de sa fonction de transfert et déterminer toutes les caractéristiques possibles.

2. On met en entrée du filtre un signal triangulaire et on obtient en sortie un signal sinusoïdal de même fréquence. Interpréter.

3. On met en entrée du filtre un autre signal, lui aussi triangulaire et on obtient en sortie un signal carré. Interpréter.

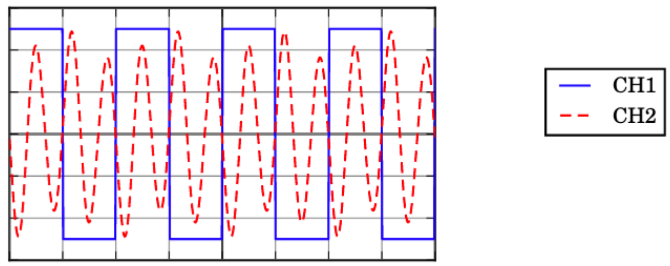
4. Est-il possible de réaliser un analyseur de spectre avec un tel filtre ? Proposer un protocole.

Exercice 10 : étude expérimentale d'un filtre *Banque PT*

La figure ci-contre représente les signaux d'entrée (voie 1) et de sortie (voie 2) d'un filtre acquis via un oscilloscope numérique. La fonction de transfert du filtre est donnée par :

$$\underline{H} = \frac{-H_0\xi j.x}{1+2\xi j.x - x^2}$$

avec $H_0 = 2$, $\xi = 0,05$ et $f_0 = 1,5\,\text{kHz}$.



Time = 1 ms/div — CH1 = 1 V/div — CH2 = 500 mV/div

1. Donner l'amplitude, la fréquence et la valeur moyenne du signal créneau.
2. Montrer qu'il s'agit d'un filtre passe-bande et calculer la largeur de sa bande passante.
On donne la décomposition en série de Fourier d'un signal créneau de fréquence f et de valeur moyenne nulle :

$$v_e(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k.\sin(2\pi k f t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k\cos(2\pi k f t).$$

3. Justifier que $B_k = 0$ dans le cas du signal de l'oscillogramme. Représenter le spectre du signal sachant que $A_k = 0$ si k est pair et $A_k \sim 1/k$ si k impair.
4. Dans un premier temps, on approxime le signal de sortie par une sinusoïde parfaite $v_s = V_{s,max}\sin(\omega.t+\varphi)$. D'après l'oscillogramme, donner l'amplitude et la fréquence de la sinusoïde ainsi modélisée. A quelle harmonique correspond-elle ?
5. L'oscillogramme montre que cette approximation n'est pas satisfaisante : il est nécessaire de tenir compte d'une seconde harmonique. Lesquelles peuvent jouer ce rôle ? **6.** Calculer le rapport de leurs amplitudes dans le signal de sortie, sachant que $|\underline{H}(1/3)| = 0,075H_0$.
7. Représenter sur un même graphe et à l'échelle le spectre du signal d'entrée et celui du signal de sortie.

Exercice 11 : étude d'un électrocardiogramme *Banque PT 2016*

Le signal $v(t)$ d'un électrocardiogramme est représenté ci-dessous.

1. Donner la fréquence du signal, comment l'appelle-t-on ?
Le signal est composé de fréquences allant de 0 à 450 Hz. On souhaite le numériser.
2. Quelle doit être la fréquence d'échantillonnage ?
On choisit une fréquence d'échantillonnage de 450 Hz et le signal comporte des fréquences parasites à 100 et 300 Hz.
3. Interpréter ces observations. Quel phénomène observe-t-on ? Expliquer son origine, dessiner le spectre.

Exercice 12 : Filtrage en travaux pratique *Banque PT 2016*

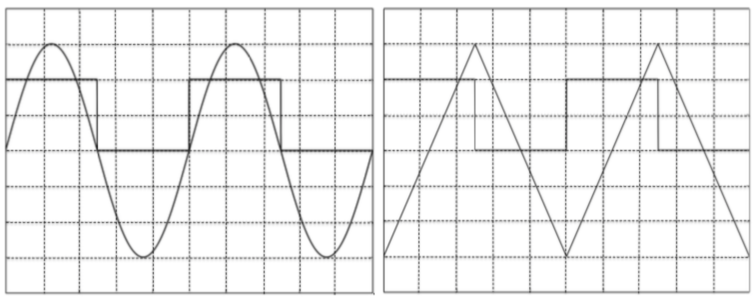
On considère un signal T-périodique défini par :

$$\begin{cases} U = E \text{ si } 0 < t < T/2 \\ U = 0 \text{ si } T/2 < t < T \end{cases}$$

On donne la transformée de Fourier d'un signal carré :

$$u_e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi}\left[\sin(2\pi f t) + \frac{1}{3}\sin(2\pi f \times 3t) + \frac{1}{5}\sin(2\pi f \times 5t) + ...\right]$$

Pour analyser les composantes fréquentielles d'un signal sonore, on utilise un transducteur qui converti le signal en une tension v_e puis un filtre passe-bande qui extrait les composantes sinusoïdales de v_e voisines de f_0 donnée. On filtre des signaux rectangulaires lors de deux expériences, avec un même filtre dont on veut déterminer les caractéristiques. On donne ci-dessous les oscillogrammes obtenus.



i- Première expérience :
Base de temps : $50\,\mu$s par carreau.
Sensibilités : pour v_e $0,5\,\mathrm{V}/div$; pour v_s, $2\,\mathrm{V}/div$.

ii- Seconde expérience :
Base de temps $5\,\mu$s par carreau.
Sensibilités : pour v_e $2\,\mathrm{V}/div$; pour v_s, $0,2\,\mathrm{V}/div$.

Sur le première oscillogramme la tension v_s obtenue est quasi-sinusoïdale, si on augmente le fréquence d'entrée on constante que l'amplitude de v_s diminue, de même si on augmente légèrement la fréquence de v_e.

1. Pour less deux expériences, qu'advient-il de la composante continue du signal d'entrée ?

2. Quel est, parmi les deux fonctions de transfert, celle du filtre utilisé ?

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0.Q} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad \text{ou} \quad \underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

3. Expliquer l'allure des deux courbes obtenues.

4. Déduire de la première expérience les valeurs de f_0 et H_0. **5.** A l'aide de la seconde expérience, caractériser le comportement du filtre, puis donner une expression approchée de $\underline{H}(j\omega)$ dans le domaine de fréquence considéré. Déterminer alors $\dfrac{H_0.f_0}{Q}$ et en déduire Q.