Travaux dirigés 14

Propagation et réflexion des ondes électromagnétiques

Questions de cours

1. Donner les ordres de grandeurs des longueurs d'onde pour les grands domaines électromagnétiques.
2. Dans le vide de charge et de courant établir l'équation de d'Alembert. Donner l'expression générale d'une onde plane progressive. Montrer qu'elles sont solutions de l'équation de d'Alembert.
3. Donner l'expression mathématiques d'une onde plane progressive monochromatique. Qu'est-ce que la direction de polarisation ? Quel vecteur indique la direction de propagation ? Exprimer le module de ce dernier vecteur.
4. Dans vide, montrer qu'une onde électromagnétique est transverse électromagnétique. Cette propriété est-elle toujours vérifiée dans un conducteur ohmique ? Pourquoi ?
5. Etablir que le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est direct.
6. Qu'est-ce qu'un milieu dispersif ? Montrer que le vide est un milieu non dispersif pour les ondes planes progressives harmoniques électromagnétiques. Montrer en revanche qu'un conducteur ohmique est un milieu dispersif pour ces ondes.
7. Donner les relations de passages pour un champ électrique, pour un champ magnétique. Quelle est leur signification ?
8. Définir la notion d'onde stationnaire. Quelle est leur expression mathématique ?
9. Qu'est-ce qu'un mode d'une cavité ? Qu'est-ce qu'une cavité ? Qu'est-ce qu'un noeud d'une onde stationnaire ? un ventre ?

Niveau I

Exercice 1 : Onde sphérique

On considère un émetteur d'ondes électromagnétiques que l'on assimile à une source ponctuelle : il peut s'agir d'un émetteur de radio, d'un satellite, d'une étoile qui rayonne, etc. L'onde émise est sphérique, de la forme en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(M,t) = E_0(r)cos(\omega t - kr)\vec{e_\theta}$$

avec $k = \dfrac{\omega}{c}$.
Le milieu de propagation est assimilé au vide.

1. Par analogie avec une onde plane, identifier le vecteur d ?onde $\vec{k}$ de l'onde sphérique.
2. On admet qu'une telle onde vérifie localement la même relation de structure qu'une onde plane. En déduire l'expression du champ magnétique associé.
3. Exprimer le vecteur de Poynting et sa moyenne temporelle.
4. Exprimer la puissance moyenne $\mathcal{P}$ rayonnée à travers une sphère de rayon r. Justifier par un argument physique que cette puissance est indépendante de r. En déduire que $E_0(r) = \dfrac{A}{r}$ avec A une constante à déterminer.

Exercice 2 ♦♦♦ : Energie et polarisation

1. Quelles sont les précautions à prendre lorsqu'on manipule des grandeurs énergétiques ? Quelles sont les expressions instantanées de la densité volumique d'énergie u et du vecteur de Poynting $\vec{R}$ pour une OPPM (se propageant suivant les $x > 0$) ? Commentaire sur la direction et le sens du vecteur de Poynting.
2. Si $f(t) = f_0 \cos \omega.t$ et $g(t) = g_0 \cos(\omega.t + \phi)$ sont deux fonctions sinusoïdales de même pulsation et déphasées, comment s'exprime simplement la moyenne temporelle de leur produit $\langle fg \rangle$ à l'aide de leur représentation complexe $\underline{f}$ et $\underline{g}$?

Par quels calculs simples accède-t-on directement aux moyennes temporelles $\langle u \rangle$ et $\left\langle \vec{R} \right\rangle$ de la densité volumique d'énergie u et du vecteur de Poynting $\vec{R}$?
3. Quelle grandeur est concernée par l'étude de la polarisation d'une OPPM ? L'expliciter sur la base d'une OPPM se propageant dans le sens des x croissants.
4. La lumière naturelle (provenant de sources classiques telles que le Soleil ou des lampes à incandescence) est non polarisée. Que signifie ce vocabulaire ? Et quelle différence présente-t-elle avec une lumière polarisée ?

Exercice 3 ♦♦♦ : OPPH électromagnétique de direction quelconque

On étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique est : $\vec{E} = E_x \vec{e_x} + E_y \vec{e_y}$ avec :

$$E_x = E_0 \exp\left(i\left(\frac{k}{3}(2x + 2y + z) - \omega.t\right)\right) \tag{1}$$

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est $\lambda = 6.10^{-1}$ m.
1. Calculer la fréquence de l'onde.
2. Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe cette onde ?
3. Calculer la valeur numérique de la constante k.
4. Etablir l'équation cartésienne d'un plan d'onde.
5. Exprimer E_y en fonction de E_x.
6. Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ de cette onde.
7. Calculer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde.
8. Calculer la vecteur de Poynting de cette onde et sa moyenne temporelle. Commenter.

Exercice 4 ♦◇◇ : Onde électromagnétique

On donne la représentation complexe du champ électrique d'une onde électromagnétique dans le vide, en coordonnées cartésiennes :

$$\left| \begin{array}{l} 0 \\ E_0 \cos\left(\frac{\pi.y}{a}\right) \exp(i(\omega.t - k_0.z)) \\ \underline{\alpha} E_0 \sin\left(\frac{\pi.y}{a}\right) \exp(i(\omega.t - k_0.z)) \end{array} \right. \tag{2}$$

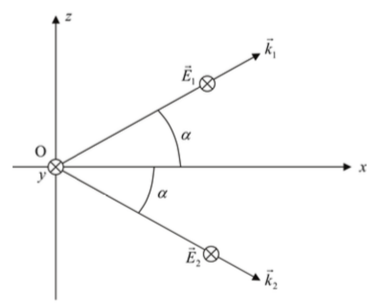
où $\underline{\alpha}$ est complexe et k_0 positif.
1. Déterminer $\underline{\alpha}$ et k_0 en fonction de E_0, ω, a et c.
2. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ de cette onde.
3. Cette onde est-elle plane ? progressive ? harmonique ? transverse électrique ? transverse magnétique ?
4. Calculer le vecteur de Poynting et sa valeur moyenne dans le temps.

Exercice 5 ••• : Rotation d'une polarisation linéaire

1. On place sur le trajet d'une onde plane progressive monochromatique se propageant dans la direction de l'axe (Oz) et polarisée rectilignement dans la direction de $\overrightarrow{e_x}$ un polariseur orienté pour transmettre une polarisation rectiligne perpendiculaire à (Oz) et faisant un angle θ par rapport au vecteur $\overrightarrow{e_x}$.
a. Ecrire l'expression du champ électrique de l'onde avant la traversée du polariseur en introduisant les notations nécessaires.
b. En déduire l'expression du champ électrique de l'onde après traversée du polariseur (on appelle ϕ_0 le déphasage dû à la traversée du polariseur). Quel est le coefficient de transmission du polariseur défini comme le rapport de l'éclairement de l'onde sortant du polariseur à l'éclairement de l'onde arrivant sur le polariseur ?
2. On place maintenant sur le trajet de l'onde une suite de N polariseurs. Le polariseur n est orienté pour transmettre une polarisation rectiligne formant un angle $n\theta$ par rapport à la polarisation initiale de l'onde.
a. Quel est l'éclairement de l'onde transmise après traversée des N polariseurs ?
b. Montrer que, pour une valeur de N suffisamment grand, le dispositif permet de faire tourner un polarisation linéaire de 90° avec une perte d'énergie négligeable. Combien de polariseurs faut-il utiliser pour que les pertes d'énergie de ce système soient inférieures à 1% ?

Exercice 6 ••• : Rotation d'une polarisation linéaire

On considère la propagation dans le vide de deux OPPM de même pulsation :
$\overrightarrow{E}_1 = E_0 \cos((\omega.t - \overrightarrow{k}_1.\overrightarrow{r})\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{E}_2 = E_0 \cos(\omega.t - \overrightarrow{k}_2.\overrightarrow{r})\overrightarrow{e_y}$.
de vecteurs d'ondes : $\overrightarrow{k}_1 = k(\cos\alpha\overrightarrow{e_x} + \sin\alpha\overrightarrow{e_z})$ et $\overrightarrow{k}_2 = k(\cos\alpha\overrightarrow{e_x} - \sin\alpha\overrightarrow{e_z})$
où $k = \dfrac{\omega}{c}$.



1. Déterminer l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E}$ de l'onde globale qui résulte de la superposition des deux ondes précédentes. On exprimera $\overrightarrow{E}$ en fonction de ω, k, α, E_0, z, t, x et d'un vecteur unitaire et on mettra $\overrightarrow{E}$ sous forme d'un produit.
2. Quelle et la direction de propagation de cette onde ? Est-elle plane ?
3. Dans cette question, il sera admis sans démonstration que la valeur moyenne $\langle\overrightarrow{R}\rangle$ du vecteur de Poynting $\overrightarrow{R}$ est proportionnelle au carré de l'amplitude du vecteur champ électrique. On place un écran orthogonal à l'axe Ox et d'équation $x = a$ (avec a une constante positive). Indiquer comment est répartie l'énergie sur cet écran ? Quel phénomène physique cette répartition d'énergie évoque-t-elle ?

Exercice 7 ••• : Effet de peau

1. Justifier numériquement (par exemple pour le cuivre) les deux approximations faites dans l'écriture des équations de Maxwell dans le conducteur en introduisant un temps $\tau = \dfrac{\epsilon_0}{\sigma}$ et en précisant le domaine d'étude du spectre électromagnétique. Réécrire les équations de Maxwell avec pour seules constantes τ et c. Quelle est l'équation de propagation à laquelle satisfait le champ $\overrightarrow{E}_t$ dans le conducteur ?
2. Résoudre cette équation et donner la relation $\underline{k}(\omega)$, en introduisant $\delta = c\sqrt{\dfrac{2\tau}{\omega}}$; commenter la solution obtenue et proposer une application numérique de δ pour le cuivre dans le cas d'une onde hertzienne de fréquence $100\,\text{MHz}$, puis $50\,\text{Hz}$; commentaires.

Exercice 8 ••• : Etude d'une onde dans le vide

On considère l'onde suivante dans le vide en notation complexe :

$$E_x = 0 \qquad E_y = E_0 \cos\left(\frac{\pi.y}{a}\right) e^{i(\omega.t-kz)} \qquad E_z = \alpha.E_0 \sin\left(\frac{\pi.y}{a}\right) e^{i(\omega.t-kz)}$$

1. Déterminer la constante α.
2. Caractériser cette onde.
3. Déterminer le champ magnétique de cette onde.
4. Exprimer la relation de dispersion et en déduire une condition sur la pulsation ω.

Niveau II

Exercice 9 ♦♦♦ : Transparence ultra-violette

Cet exercice a pour but d'étudier la propagation d'une onde électromagnétique de haute fréquence à l'intérieur d'un métal, pour laquelle ni la loi d'Ohm statique ni l'ARQS ne sont valables. On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.
Les porteurs de charges dans ce métal sont des électrons de charge $-e$, de masse m_e, présents en densité volumique N.
Considérons le mouvement d'un électron de conduction du métal, sous l'effet de la force de Lorentz électrique (force magnétique négligeable) et d'une force de friction modélisant les interactions avec le réseau cristallin, $\vec{f} = -\frac{m_e}{\tau}\vec{v}$.

1. Établir l'expression de la vitesse complexe de l'électron $\underline{\vec{v}}$. En déduire que le métal possède une conductivité complexe $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + i\tau\omega}$
où γ_0 est une constante dont on donnera l'expression.
2. Écrire l'équation de conservation de la charge complexe. En déduire que le métal reste localement neutre, même à haute fréquence.
3. Écrire les équations de Maxwell complexes dans le métal associées à une OPPH quelconque $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E_0}} exp(i(\omega t - \vec{k}.\vec{r}))$.
4. Établir la relation de dispersion sous la forme $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\underline{\gamma}\omega$.
5. En déduire que, pour un domaine de pulsation à préciser, l'onde peut être transmise au travers du métal sans être absorbée.
6. Expliquer le titre de l'exercice.

Données :
i. dans un métal usuel, $\gamma_0 = 5.10^7$ S.m^{-1} et $\tau = 10^{-14}$ s ;
ii. double produit vectoriel : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c}).\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}$

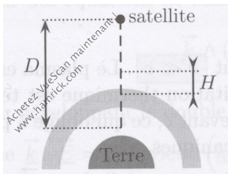
Exercice 10 ♦♦◊ : Onde dans un métal

A suffisamment basse fréquence, un métal est localement neutre et sa conductivité γ est réelle. On peut y négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction.
1. Etablir l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique dans le métal.
2. Le métal est illimité dans l'espace. On envisage une onde dont le champ électrique s'écrit, en complexe :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega.t - \underline{k}z)} \vec{e_x} \quad (3)$$

où E_0 est une constante réelle positive. Etablir la relation de dispersion en faisant intervenir une distance caractéristique notée δ (épaisseur de peau). Donner l'expression du champ électrique. Quelle est la signification de δ ?
3. Etablir l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ de l'onde. Les champ $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont-ils en phase ?
4. Etablir l'expression du vecteur de Poynting moyenné en temps.
5. On raisonne sur un volume parallélépipédique d'épaisseur dz, d'extensions L selon x et l selon y. Déterminer l'expression de la puissance $\mathcal{P}$ (moyennée en temps) cédée à ce volume de métal par l'onde (effet Joule).
6. En réalisant un bilan énergétique sur le volume, vérifier la cohérence des résultats des deux questions précédentes.

Exercice 11 ♦♦♦ : Système GPS et ionosphère



Le système de localisation GPS est si précis qu'il est nécessaire de prendre en compte la dispersion due à la traversée de l'ionosphère. L'ionosphère, d'épaisseur H, est un plasma globalement neutre.
Le plasma est un gaz ionisé. Il contient :

i- des électrons de masse m, de charge $-e$ et de densité particulaire n.

ii- des ions de masse M, de charge $+e$ et de densité particulaire n.

La plasma est suffisamment dilué pour considérer que ses éléments constitutifs sont sans interaction.

1. Lors du passage de l'onde dans le plasma, à quelle condition l'effet du champ magnétique de l'onde sur les charges est-il négligeable devant celui du champ électrique ?
2. On néglige l'effet du champ magnétique sur les charges. En un point donné du plasma, le champ électrique de l'onde s'écrit, en complexes, $\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 e^{i\omega.t}$. En étudiant le mouvement des charges, établir l'expression de la conductivité complexe $\underline{\gamma}(\omega)$ du plasma. Commenter.
3. On envisage une onde électromagnétique plane pseudo progressive harmonique, dont le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega.t - \underline{\vec{k}}.\vec{r})} \tag{4}$$

Ecrire les équations de Maxwell en complexes. Montrer que la relation de dispersion s'écrit : $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$, où la grandeur ω_p appelée pulsation plasma, est à définir.
4. Pourquoi ω_p joue-t-elle le rôle de pulsation de coupure ? Calculer la vitesse de groupe.
5. Un train d'onde électromagnétique est envoyé par un satellite vers la Terre. Quel temps τ met-il pour parcourir la distance D ?
L'espace est assimilé à du vide en dehors de l'ionosphère. La fréquence de l'onde est telle que $f \gg f_p$, ce qui permet un calcul approché avec un développement limité.
6. Pour prendre en compte le dispersion ionosphérique, on envoie deux trains d'onde de fréquences f_1 et f_2 et on mesure l'écart Δt entre leurs temps de parcours.
Exprimer Δt avec $f_2 > f_1 \gg f_p$.
7. Montrer que $D = c\tau - d$, avec $d = \dfrac{f_1^2 f_2^2 c\Delta t}{f^2(f_2^2 - f_1^2)}$. On trouve que d est de l'ordre de quelques mètres. Qu'en penser ?

Exercice 12 ♦♦♦ : Onde dans un câble coaxial

On étudie un guide d'onde constitué de deux armatures métalliques cylindriques coaxiales, d'axe $\vec{e_z}$ et de rayon respectifs R_1 et $R_2 > R_1$. Les régions $r < R_1$ et $r > R_2$ sont remplies de métal parfait (conductivité infinie). La région $[R_1, R_2]$ est occupée par du vide. Dans cette zone vide, on veut propager une onde électromagnétique dont le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E}(r, \theta, z, t) = f(r)\cos(\omega.t - kz)\vec{e_r} \tag{5}$$

avec $f(R_1) = E_0 > 0$.
1. A l'aide des équations de Maxwell (préciser la ou lesquelles), déterminer la fonction $E(r)$.
2. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ de l'onde.
3. Etablir la relation de dispersion (relation entre ω et k) pour l'onde envisagée. Commenter.
4. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting. En déduire le flux d'énergie (moyenné e temps) à travers une section transversale du câble.
5. Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique de l'onde, puis la moyenner en temps.
6. En déduire la vitesse moyenne v_e de propagation de l'énergie dans la câble.

Exercice 13 ♦♦♦ : Pression de radiation

1. Soit une onde plane, monochromatique, de fréquence ν, se propageant dans la direction et le sens de $\overrightarrow{e_x}$, dont le champ électrique est $\overrightarrow{E} = E_0 \cos(\omega.t - k.x)\overrightarrow{e_y}$. On rappelle que l'éclairement $\mathcal{E}$ est la puissance moyenne qui traverse une surface d'aire unité perpendiculaire à la direction de propagation.
Exprimer $\mathcal{E}$ en fonction de ϵ_0, c et E_0.
2. On considère cette onde comme un faisceau de photons se propageant dans la direction et le sens de $\overrightarrow{e_x}$.
a. Exprimer le nombre N_0 de photons traversant par unité de temps l'unité de surface perpendiculaire à (Ox) en fonction de $\mathcal{E}$, de ν et de la constante de Planck h.
b. L'onde arrive sur une surface plane perpendiculaires à (Ox), d'aire S, parfaitement réfléchissante. On étudie le rebondissement des photons sur cette surface.
Quelle est la quantité de mouvement reçue par la paroi au cours d'un choc photon-paroi ?
Quelle est la force subie par la paroi en fonction de $\mathcal{E}$, S et c ?
Exprimer la pression P subie par la paroi en fonction de $\mathcal{E}$ et c puis en fonction de ϵ_0 et E_0.
c. Reprendre la question ci-dessous lorsque la paroi est parfaitement absorbante.
d. Calculer $\mathcal{E}$, E_0 et P sur une paroi totalement absorbante pour un laser ayant un diamètre $d = 5,0\,\text{mm}$ et une puissance $\mathcal{P} = 1,0.10^2\,\text{W}$ (laser utilisé industriellement pour la découpe de feuilles).
3.a. L'onde est maintenant absorbée par une sphère de rayon a, bien inférieur au rayon du faisceau. Quelle est, en fonction de $\mathcal{E}$, a et c la force $\overrightarrow{F}$ subie par la sphère ?
b. Le Soleil donne au voisinage de la Terre (juste au-dessus de l'atmosphère terrestre) l'éclairement $\mathcal{E} = 1,4.1^3\,\text{W.m}^{-2}$. L'émission est isotrope, la distance Terre-Soleil est égale à $D = 150.10^6\,\text{km}$ et sur une surface de dimensions petites devant D, l'onde arrivant du Soleil est quasi-plane.
Quelle est la puissance $\mathcal{P}_0$ émise par le Soleil ?
Un objet sphérique, de rayon a, de masse volumique μ, est, dans le vide interplanétaire, à la distance r du Soleil et absorbe totalement le rayonnement solaire. Evaluer le rapport entre la force due à l'absorption du rayonnement solaire et la force gravitationnelle exercée par le Soleil sur cet objet dans les deux cas suivants :

- **i-** cas d'un astéroïde : $\mu = 3,0.10^3\,\text{kg.m}^{-3}$ et $a = 1,0\,\text{m}$,
- **ii-** cas d'une poussière interstellaire : $\mu = 1,0.10^3\,\text{kg.m}^{-3}$ et $a = 0,10\,\mu\text{m}$.

Commenter.
On donne la constante de la gravitation universelle $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}\,\text{N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ et la masse du Soleil : $M_S = 2,0.10^{30}\,\text{kg}$.

Exercice 14 ♦◇◇ : Etude d'un polaroïde

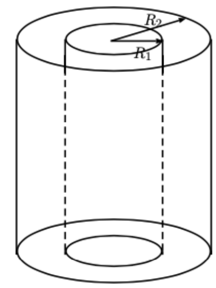
Dans cet exercice, on étudie un polaroïd utilisé en travaux pratiques. Ce polariseur rectiligne n'est pas idéal. T_1 désigne le coefficient de transmission en énergie, selon la direction de transmission privilégiée du polariseur et T_2 le coefficient de transmission analogue, selon la direction perpendiculaire. On supposera $T_2 < T_1$. Une onde électromagnétique plane, polarisée rectilignement, arrive normalement sur la face d'entrée d'un polaroïd selon l'axe (Oz) ; le vecteur champ électrique de l'onde fait un angle θ avec la direction de transmission privilégiée du polaroïd, supposée parallèle à l'axe (Ox).

1. Calculer le coefficient de transmission T en énergie de l'onde à travers ce polaroïd en fonction de T_1, T_2 et de θ. Commenter en envisageant le cas particulier du polariseur idéal.
2. Une onde de lumière naturelle arrive normalement, selon l'axe (Oz), sur un ensemble constitué de deux polaroïds identiques, disposés en série, perpendiculairement à l'axe (Oz).
Les direction des transmission privilégiée des deux polariseurs font un angle α. Les polariseurs ne sont pas idéaux ; ils sont caractérisés par les coefficients T_1 et T_2 définis précédemment.
a. On admet qu'on peut écrire la champ électrique complexe associé à la lumière naturelle sous la forme simplifiée :

$$\underline{\vec{E}}(M,t) = E_0.e^{i(kz-\omega.t+\phi_x(t))}\vec{e_x} + E_0.e^{i(kz-\omega.t+\phi_y(t))}\vec{e_y} \tag{6}$$

où les phases $\phi_x(t)$ et $\phi_y(t)$ varient très rapidement et de manière aléatoire au cours du temps. Exprimer l'éclairement de cette onde en fonction de ϵ_0, c et E_0.
b. Exprimer, pour un angle quelconque α, le coefficient de transmission T_α en énergie de l'ensemble des deux polariseurs en fonction de T_1, T_2 et α. On rappelle que les détecteurs optiques classiques ont un temps de réponse très grand devant la durée des trains d'onde de la lumière, et leur réponse est donc proportionnelle à la moyenne temporelle du flux d'énergie capté.
c. En déduire, en fonction de T_1 et T_2, le coefficient de transmission T_0 de l'ensemble des deux polariseurs quand $\alpha = 0$. En déduire de même le coefficient de transmission T_{90} de l'ensemble des deux polariseurs quand $\alpha = 90^\circ$. Montrer que ces deux résultats étaient prévisibles sans calcul.
d. Montrer que, dans l'approximation $T_2 \ll T_1$, on retrouve la loi de Malus. Comment vérifier expérimentalement cette loi ?

Exercice 15 ♦◇◇ : Onde dans un câble coaxial



On étudie un câble coaxial constitué de deux armatures métalliques cylindriques, d'axe $\vec{e_z}$ et de rayons respectifs R_1 et $R_2 > R_1$. Ces cylindres sont séparés par un milieu qui se comporte comme le vide. Dans cette zone, se propage une onde électromagnétique dont le champ électrique s'écrit : $\vec{E}(r,\theta,z,t) = f(r)\cos(\omega.t - kz)\vec{e_r}$ avec $f(R_1) = E_0$.

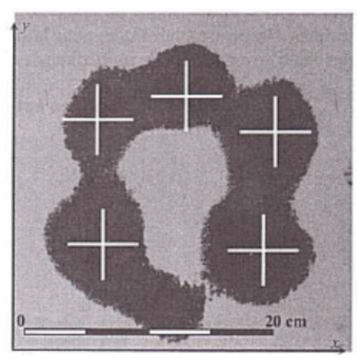
1. A partir d'une des équation de Maxwell déterminer la fonction $f(r)$.
2. En déduire l'expression de $\vec{E}$. L'onde est-elle progressive ? Est-elle monochromatique ?
3. Quelle est la forme des surfaces d'onde ?
4. Déduire d'une seconde équation de Maxwell l'expression du champ magnétique entre les deux cylindres (on ne considérera pas de composante statique).
5. A quelle condition sur k, les deux autres équations de Maxwell sont-elles satisfaites ?

On souhaite déterminer l'intensité du courant i circulant le long du câble ; pour cela, on se propose d'appliquer le théorème d'Ampère sur un contour fermé circulaire de rayon r.
6. Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère conduit, dans le cas présent, à une formulation du théorème d'Ampère identique à celle du cas statique.
7. En déduire l'intensité $i(t,z)$ du courant le long du cylindre intérieur.

On cherche désormais à faire un bilan énergétique sur le câble :
8. Déterminer l'expression du vecteur de Poynting.
9. Exprimer la puissance moyenne temporelle transportée par l'onde à travers le câble.
10. Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique de l'onde, puis sa moyenne dans le temps.
11. En déduire la vitesse moyenne v_e de propagation de l'énergie dans le câble.

Exercice 16 ♦◇◇ : Fonctionnement simplifié d'un micro-onde

On considère un micro-onde la largeur $a = 30\,\text{cm}$ et de profondeur $b = 30\,\text{cm}$. Les parois en $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ et $y = b$ sont assimilées à des conducteurs parfaits. On place dans la cavité une plaque couverte de chocolat et on constate que le chocolat fond à différents endroits. On cherche un champ électrique $\vec{E}$ de la forme :



$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\cos(\omega.t)\vec{e_z}$$

1. Quelle est le type de l'onde ? Montrer que n et m ne peuvent qu'être entier.
2. Donner l'équation de propagation d'une onde dans une cavité.
3. Déterminer la relation entre n, m et ω pour que le champ $\vec{E}$ vérifie l'équation d'onde. Comment s'appelle cette relation ?
4. Déterminer le couple (m,n) puis la fréquence f qui peut exister dans le cavité.
5. Déterminer $\vec{B}$ dans la cavité.

Exercice 17 ♦♦♦ : Guide d'onde rectangulaire

On considère un guide d'onde cylindrique, de génératrice parallèles à l'axe z, à section droite rectangulaire, constitué de parois parfaitement conductrices incluses dans les plans d'équations $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ et $y = b$. Une onde électromagnétique monochromatique se propage suivant $\overrightarrow{e_z}$. Elle est supposée transverse magnétique (TM), c'est-à-dire que le champ magnétique est orthogonal à la direction de propagation. Les champs électrique et magnétique sont donc de la forme :

$$\overrightarrow{E} = E_x\overrightarrow{e_x} + e_y\overrightarrow{e_y} + E_z\overrightarrow{e_z} \tag{7}$$
$$\overrightarrow{B} = B_x\overrightarrow{e_x} + B_y\overrightarrow{e_y} \tag{8}$$

L'onde étant monochromatique, on cherche E_z, en notation complexe, sous la forme :

$$\underline{E}_z(x, y, z, t) = E_{0z}(x, y)e^{i(k_g.z-\omega.t)} \tag{9}$$

où k_g est la pulsation spatiale de l'onde guidée.

1. Déterminer l'équation de propagation vérifiée par E_z. En déduire que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par E_{0z} peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_{0z}}{\partial y^2} + k_c^2\underline{E}_{0z} = 0 \tag{10}$$

où k_c s'exprime en fonction de k_g, ω et c.

2. On cherche $E_{0z}(x, y)$ sous la forme d'une fonction à variable séparées, soit $E_{0z}(x, y) = f(x)g(y)$. Déterminer les équations différentielles vérifiées par f et g.

On introduit p et q telles que :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -p^2 f \tag{11}$$
$$\frac{d^2 g}{dy^2} = -q^2 g \tag{12}$$

Justifier rapidement le choix du singe "moins" aux membres de droite. Déterminer la relation entre p, q et k_c.

3. Intégrer les équations différentielles précédentes puis, à partir des conditions aux limites, montrer que la solution est de la forme :

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)e^{i(k_g.z-\omega.t)} \tag{13}$$

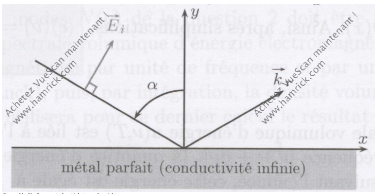
4. Exprimer k_c en fonction de m, n, a et b.

5. Un couple de valeurs (m, n) caractérise un "mode" de propagation. Montrer que ω doit être supérieur à une valeur à déterminer pour que le mode (m, n) puisse se propager.

6. Déduire de la composante E_z, à l'aide des équations de Maxwell, les composantes E_x, E_y, B_x et B_y en notation réelle.

7. Déterminer la valeur moyenne du vecteur de Poynting. Le résultat est-il conforme à la direction de propagation de l'onde ?

Exercice 18 ♦♦♦ : Réflexion sur un métal parfait



On souhaite étudier la réflexion d'une OPPH sur un métal conducteur parfait occupant le demi-espace $y < 0$. Dans les premières questions, on se limite à l'étude d'une onde dont le champ électrique est polarisé rectilignement dans le plan d'incidence. On note avec un indice i (respectivement r) les grandeurs associées à l'onde incidente (respectivement réfléchie). Le champ électrique $\vec{E}_i$ a pour expression, en complexes,

$$\underline{\vec{E}_i}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega . t - \vec{k}_i . \vec{r})} \tag{14}$$

Le vecteur d'onde de l'onde incidente est $\vec{k}_i = k \sin\alpha \vec{e_x} - k\cos\alpha \vec{e_y}$, avec $k = \dfrac{\omega}{c}$.

1. Rappeler la structure d'une onde plane progressive monochromatique se propageant dans le vide (rappeler les deux relations qui existent entre $\vec{k}_i$, $\vec{E}_i$ et $\vec{B}_i$ et commenter).

2. Justifier que le plan d'incidence est un plan de symétrie du problème. En déduire que $\vec{E}_{0r}.\vec{e_z} = 0$.

3. Les relations de passage que doivent vérifier $\vec{E}$ et $\vec{B}$ au voisinage d'une interface portant une densité surfacique de charge σ et une densité de courant surfacique $\vec{j}_s$ sont, en notant $\vec{n}_{1\to 2}$ le vecteur normal à l'interface dirigé du milieu 1 vers le milieu 2 :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{n}_{1\to 2} \tag{15}$$

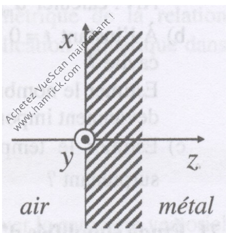
$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1\to 2} \tag{16}$$

Adapter ces relations au métal conducteur parfait (conductivité infinie), puis déterminer complètement le champ réfléchi $\vec{E}_r$. En déduire la densité surfacique de charge σ sur l'interface.

4. Calculer le vecteur densité de courant surfacique $\vec{j}_s$ en fonction de σ et commenter.

5. On considère désormais que le champ électrique de l'onde incidente est polarisé orthogonalement au plan d'incidence. Montrer sans calcul que la densité surfacique de charge est nulle. Déterminer le vecteur densité de courant surfacique. Pourquoi n'existe-t-il par une relation comparable à celle obtenue à la question **4** ?

Exercice 19 ♦♦♦ : Réflexion/transmission sur un conducteur réel



Le demi-espace $z < 0$ est de l'air assimilé à du vide et le demi-espace $z > 0$ est occupé par un conducteur réel de type cuivre de conductivité électrique $\sigma = 0,57.10^8\,\mathrm{S.m^{-1}}$. On pose par ailleurs $\tau = \dfrac{\epsilon_0}{\sigma}$. Dans le vide une OPPH polarisée rectilignement de champ électrique $\underline{\vec{E}_i} = E_0 e^{i(\omega.t-k.z)}\vec{e_x}$ tombe sur le métal et y engendre une onde réfléchie et une onde transmise.

I-Les champs **1.** Donner le champ magnétique $\underline{\vec{B}_i}$ de l'onde incidente.

2. Ecrire les expressions des champ électrique $\underline{\vec{E}_r}$ et magnétique $\underline{\vec{B}_r}$ de l'onde réfléchie en notant $\underline{r}$ le coefficient de réflexion en amplitude du champ électrique.

Le champ électrique transmis est cherché sous la forme $\underline{\vec{E}_t} = \underline{t}E_0 e^{i(\omega.t-\underline{k}'z}\vec{e_x}$ et le cours donne $\underline{k}' = \dfrac{1-i}{\delta}$ avec $\delta = c\sqrt{\dfrac{2\tau}{\omega}}$, l'épaisseur de peau.

3. Donner l'expression du champ magnétique $\underline{\vec{B}_t}$ correspondant, où dans l'amplitude, apparaît $\underline{t}$, E_0, c et $\alpha = \sqrt{2\omega.\tau}$.

II- Les coefficients de réflexion et de transmission **1.** Les champs sont continus en $z = 0$. En déduire les expressions de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de α. Commenter. Vers quelles valeurs tendent-ils dans la limite du conducteur parfait ?

2. Calculer α pour le cuivre à une fréquence hertzienne $f = 320\,\mathrm{MHz}$ et en déduire l'expression approché (à l'ordre 1 en α) du coefficient de réflexion $\underline{r}$. Quel est alors de déphasage ϕ de l'onde réfléchie su l'onde incidente ? Montrer que tout se passe comme si l'onde incidente, à la célérité dans le vide, faisait un aller-retour dans le métal sur une profondeur z_p à déterminer. Interpréter. Calculer numériquement z_p.

3. Calculer les trois vecteurs de Poynting moyens : $\left\langle \vec{R}_i \right\rangle$, $\left\langle \vec{R}_r \right\rangle$ et $\left\langle \vec{R}_t \right\rangle$, puis définir et exprimer en fonction de α (sans le supposer petit) les coefficients de réflexion R et de transmission T en énergie. Etablir et expliquer la relation simple entre R et T. Montrer que l'expression approchée de T, compte tenu du fait que $\alpha \ll 1$, s'exprime très simplement en fonction de α.

AN : Calculer T pour le cuivre à une fréquence $f = 350\,\mathrm{MHz}$ et commenter.