

Travaux dirigés 20

Interférences à N-ondes - Réseaux

Niveau I

Exercice 1 $\star\star\star$: Spectrométrie à réseau

On souhaite déterminer la longueur d'onde λ de la raie du cadmium avec un réseau comptant $n = 500$ traits par millimètre.

1. Décrire un montage expérimental simple pour trouver cette longueur d'onde.
2. Etablir la formule des réseaux.
3. On se place en incidence normale. On observe l'ordre -2 et l'ordre 2 séparés d'un angle $\alpha = 61^\circ 9'$. Déterminer λ .

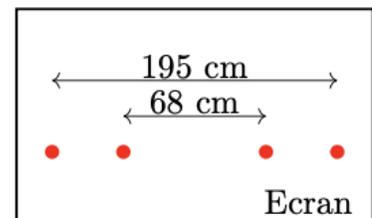
Exercice 2 $\star\star\star$: Ordres présents pour un réseau par transmission

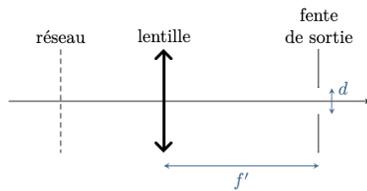
On considère un réseau par transmission comportant $800 \text{ traits} \cdot \text{mm}^{-1}$. Il est éclairé sous une incidence normale par une fente lumineuse située dans le plan focal objet d'une lentille convergente. Cette source émet une radiation de longueur d'onde λ .

1. Déterminer le nombre d'ordres visibles si $\lambda = 400 \text{ nm}$. Calculer les angles correspondants : θ_p , angle de l'ordre p . On rassemblera les résultats dans un tableau.
2. Reprendre la question précédente si $\lambda = 750 \text{ nm}$.
3. On se place dans le cas d'une source blanche. Représenter la figure que l'on observe sur un écran placé derrière le réseau.
4. Observe-t-on un recouvrement entre les différents ordres? Si oui, à partir de quel ordre p ? Dans ce cas, déterminer la longueur d'onde recouvrant l'ordre concerné pour $\lambda = 400 \text{ nm}$.

Exercice 3 $\star\star\circ$: Pas d'un CD

Un disque compact est un disque en polycarbonate possédant sur l'une de ces faces une piste très fine en forme de spirale sur laquelle sont gravées les informations sous forme numérique. Cette surface est assimilable à un réseau par réflexion. On éclaire le CD avec une incidence normale en utilisant un laser de longueur d'onde 632 nm . En plaçant un écran derrière le laser à 80 cm du CD, on observe sur l'écran 4 points (l'ordre 0 étant masqué par le laser) schématisés sur la figure. En déduire le pas de la piste du CD.



Exercice 4 $\star\star\star$: Monochromateur à réseau

Un monochromateur à réseau est un dispositif optique permettant de produire une radiation monochromatique de longueur d'onde λ_0 réglable à partir d'une radiation polychromatique. On les retrouve par exemple dans tous les spectromètres destinés à l'identification d'espèces chimiques. Pour des raisons pratiques la plupart des monochromateurs utilisent des réseaux par réflexion, qui maximisent l'intensité lumineuse en sortie. Nous allons en étudier le principe sur le modèle simplifié représenté ci-contre, reposant sur un réseau par transmission.

Un réseau en transmission à $n = 500 \text{ traits} \cdot \text{mm}^{-1}$ est éclairé par un faisceau de rayons parallèles depuis une source de lumière blanche non représentée sur le schéma. Les rayons incident et émergent forment respectivement des angles i_0 et i avec l'axe optique orthogonal au réseau. On cherche à isoler la longueur d'onde $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$.

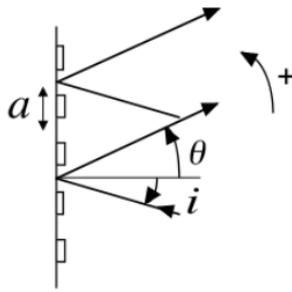
1. On souhaite observer l'ordre 2 sur l'axe optique pour la longueur d'onde λ_0 à isoler. En déduire l'inclinaison i_0 à donner à la source.
2. Considérons un rayon de longueur d'onde $\lambda_0 + \delta\lambda$ avec $\delta\lambda \ll \lambda_0$. Déterminer l'angle i avec lequel il émerge du réseau. En déduire la dispersion angulaire du réseau au voisinage de λ_0 , qui s'exprime en $\text{rad} \cdot \text{nm}^{-1}$.

En sortie du réseau se trouvent une lentille convergente et une fente de sortie de largeur d située dans le plan focal image de la lentille.

3. Déterminer les angles en sortie du réseau des rayons passant par les deux extrémités de la lentille. En déduire la résolution $\Delta\lambda$ du monochromateur, c'est-à-dire la largeur spectrale du faisceau de sortie.
4. Comment choisir la largeur de la fente de sortie pour obtenir la radiation la plus pure possible ? En pratique, un compromis est à trouver : expliquer.
5. Comment choisir la distance focale de la lentille pour obtenir la radiation la plus pure possible ?

Niveau II

Exercice 5 $\star\star\star$: Analyse de la surface d'un disque compact



Un disque compact est un disque de polycarbonate possédant sur l'une de ses faces une piste en forme de spirale $r = r_m + a \cdot \frac{\theta}{2\pi}$ avec $r_m = 2,1$ cm et $r_m a = 5,9$ cm. Le long de cette spirale sont gravées les informations sous forme numérique. La spirale éclairée par un faisceau laser non focalisé se comporte localement comme un réseau par réflexion de pas a . On note i l'angle d'incidence du faisceau laser et θ l'angle de réflexion.

1. Montrer que la relation fondamentale des réseaux par réflexion est :

$$a(\sin \theta + \sin i) = p\lambda$$

en notant p l'ordre d'interférences lié à la diffraction.

On se propose de caractériser la structure d'un CD en observant la diffraction du faisceau laser sur sa surface. Ce faisceau, de largeur 1 mm et de longueur d'onde $\lambda = 650$ nm éclaire en incidence normale la surface d'un CD. La lumière réfléchi sur un écran placé face au CD est constituée d'une série de taches alignées. L'angle entre les deux premières taches de part et d'autre de la réflexion directe du laser vaut $\theta = 48^\circ$.

2. Déterminer la distance entre deux sillons. Estimer le nombre de sillons éclairés par le faisceau laser. L'hypothèse du réseau est-elle justifiée ?

3. Par une estimation rapide de la surface de la zone gravée sur un CD, en déduire un ordre de grandeur de sa capacité de stockage. On supposera que la distance entre deux creux ou deux bosses successives servant au codage est égale à la distance entre deux sillons, et donc que la surface occupée par 1 bit est égale à a^2 . Exprimer cette capacité en octet, sachant qu'un octet vaut 8 bits.

4. On utilise désormais un faisceau incident de lumière blanche, parallèle et suffisamment large pour éclairer complètement un segment radial du disque. Ce faisceau arrive sur le disque avec un angle $i = -10^\circ$. A quelle distance minimale D_m faut-il placer son oeil pour commencer à voir l'ensemble du spectre visible d'ordre 1 ? Effectuer un dessin clair afin de vous aider à répondre.

Exercice 6 $\star\star\star$: Pouvoir de résolution d'un réseau par transmission

On considère un réseau de $n = 1100 \text{ traits}\cdot\text{mm}^{-1}$ délimité par une monture de $35 \text{ mm}\times 35 \text{ mm}$ et éclairé par un faisceau de lumière parallèle, sous un angle d'incidence noté i (compté à partir de la normale au plan du réseau). L'observation se fait à l'infini, selon une direction variable notée θ .

1. Déterminer l'ordre maximal p_{max} observable pour chacune des radiations extrêmes du spectre du visible à savoir $\lambda_V = 400 \text{ nm}$ et $\lambda_R = 750 \text{ nm}$.
2. Déterminer l'expression de θ en fonction de n, p et λ lorsque le réseau est réglé à son minimum de déviation.
3. Déterminer à partir de la formule des réseaux, l'expression de la dispersion angulaire définie par $\frac{d\theta}{d\lambda}$. La calculer dans le second ordre et au minimum de déviation pour $\lambda = 589,0 \text{ nm}$.
4. On appelle pouvoir de résolution la grandeur $\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\delta\lambda_{min}}$ où $\delta\lambda_{min}$ est le plus petit écart de longueur d'onde (à partir de λ) pouvant être mis en évidence par le spectroscopie. Dans le cas d'un réseau, on peut démontrer que $\mathcal{R} = pN$ où N désigne le nombre total de traits du réseau éclairés.
 - i. Calculer \mathcal{R} dans le second ordre. En déduire la valeur de $\delta\lambda_{min}$ pour $\lambda = 589,0 \text{ nm}$. Peut-on a priori résoudre le doublet du sodium pour lequel $\lambda = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda' = 589,6 \text{ nm}$?
 - ii. L'observation se fait dans le plan focal d'une lentille de distance focale $f' = 1,0 \text{ m}$. Quelle est, dans le second ordre et au minimum de déviation, la distance entre les images des raies de longueurs d'onde $\lambda = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda + \delta\lambda_{min}$ dans le plan focal de la lentille ?
 - iii. Ces deux raies sont-elles résolues spatialement si l'image est obtenue grâce à un capteur CCD ("Charge Coupled Device") constitué de pixels de largeur $10 \mu\text{m}$ de côté ?
 - iv. Que peut-il se passer si la distance focale de la lentille est plus courte ou si les pixels sont plus larges ?

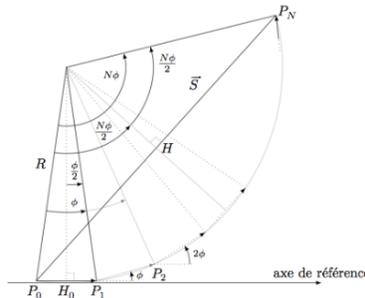
Exercice 7 $\star\star\star$: Diagramme de Fresnel

On éclaire un réseau de fentes considérées comme infiniment fines et distantes de $a = 10 \mu\text{m}$, par une OPM, de longueur d'onde λ , perpendiculaire à la pupille et de largeur $L = 1 \text{ cm}$. On observe la figure de diffraction à l'infini dans la direction θ .

1. Déterminer le déphasage ϕ entre deux rayons lumineux successifs.
2. En utilisant les vecteurs de Fresnel :
 - i. Déterminer la position des maxima principaux et déterminer leur largeur.
 - ii. Justifier, à l'aide de la construction géométrique suivante que l'intensité diffractée $I(\theta)$ dans le direction θ est de la forme :

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \frac{N\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \right)^2$$

- iii. Justifier alors que la condition pour obtenir des franges brillantes est très "stricte".



3. On souhaite étudier le spectre d'une lampe à vapeur de mercure en utilisant la diapositive précédente et plus précisément on souhaite vérifier l'écart entre les deux raies jaunes du mercure $\lambda_1 = 579,1 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 577,0 \text{ nm}$. En vous aidant de l'annexe, déterminer à partir de quel ordre il est possible de séparer les deux raies.

Annexe : pouvoir de résolution d'un réseau

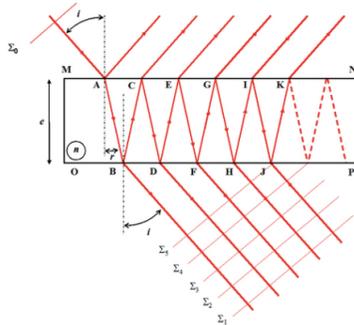
Le pouvoir de résolution d'un réseau est l'aptitude du réseau à séparer deux longueurs d'onde. Il est défini par le critère de Rayleigh qui considère que deux longueurs d'onde λ et $\lambda + \Delta\lambda$ sont séparables si le maximum de l'une $\lambda + \Delta\lambda$ est à la position du premier minimum nul de l'autre λ . Le pouvoir de résolution vaut alors :

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = k \cdot N$$

où k est l'ordre et N est le nombre de traits éclairés.

Exercice 8 $\star\star\star$: Filtre interférentiel

Un filtre interférentiel est une lame transparente d'indice n et d'épaisseur e dont les faces sont traitées. Elle réfléchissent la lumière avec un coefficient de réflexion en amplitude r très proche de 1 et le coefficient de transmission en amplitude est noté t . Pour un rayon arrivant sous l'incidence i ce dispositif donne une infinité de rayons lumineux transmis qui ont subi 0, 2, 4, 6, ... réflexions à l'intérieur de la lame. Ces réflexions n'introduisent aucun déphasage.



Incidence normale

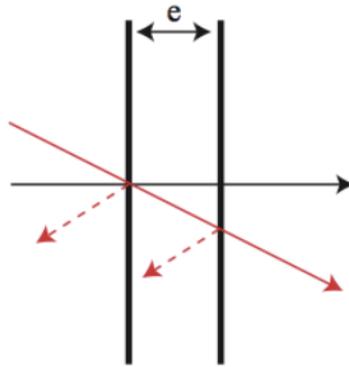
1. Exprimer le déphasage entre deux rayons successifs.
2. Le nombre de vibration qui interfèrent étant très élevé, l'intensité transmise ne sera importante que si les interférences entre toutes ces ondes sont constructives. On considère que le filtre ne laisse passer que les longueurs d'onde vérifiant cette condition. Quelle épaisseur doit avoir cette lame de verre d'indice $n = 1,5$ pour que la seule radiation visible soit la raie verte du mercure $\lambda = 546$ nm.

Incidence i non nulle

3. Exprimer le déphasage ϕ entre deux rayons successifs en fonction de l'angle r des rayons réfractés par rapport à la normale et de l'indice n .
4. De quelle couleur apparaît le filtre lorsqu'on le regarde sous une incidence $i = \frac{\pi}{3}$?
5. Etablir l'expression de l'éclairement transmis en fonction de ϕ et tracer cette fonction. Commenter.

Exercice 9 $\star\star\star$: Interféromètre de Fabry-Pérot

L'interféromètre de Fabry-Pérot est constitué de deux lames de verre dont les faces en regard sont séparées d'une épaisseur d'air e . Elles sont parallèles et traitées pour en augmenter le coefficient de réflexion. On ne tiendra pas compte de l'épaisseur des lames dans le raisonnement. Le coefficient de réflexion en amplitude sur les faces est noté r supposé réel, et on notera $R = r^2$. L'observation se fait en transmission et à l'infini c'est-à-dire dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale f' .



1. L'appareil est éclairé par une onde monochromatique de longueur d'onde λ sous une incidence i faible. Représenter le trajet des différents rayons. A-t-on affaire à un interféromètre à division d'amplitude ou à division du front d'onde ?
2. Montrer qu'il faut tenir compte de tous les rayons transmis dans l'écriture de l'amplitude du champ transmis sachant que R est très proche de 1. En négligeant l'absorption des lames de l'interféromètre, donner la relation entre les coefficients de réflexion et de transmission en puissance R et T .
3. Montrer que l'intensité obtenue en transmission est de la forme :

$$I = \frac{I_M}{1 + m \sin^2(\varphi/2)}$$

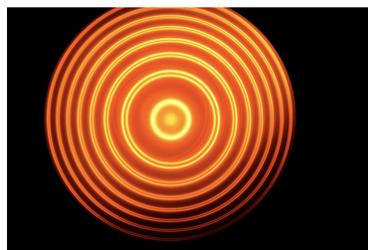
où m est un coefficient à expliciter en φ le déphasage entre deux rayons consécutifs qui interfèrent sur l'écran.

4. Tracer $I(\varphi)$. On définit $p = \frac{\varphi}{2\pi}$ comme l'ordre d'interférence. Caractériser les valeurs de p pour lesquelles l'éclairement est maximal.
5. On éclaire l'interféromètre par une source ponctuelle à distance finie et on observe les interférences à l'infini. Montrer que les franges d'interférences sont des anneaux. Quel est leur centre ?
6. On note ρ la distance d'un point de l'écran au centre de la figure. Soit p_0 l'ordre d'interférence au centre des anneaux. On suppose ici que l'épaisseur e est telle que p_0 est un entier. Montrer que l'anneau d'ordre $p = p_0 - k$, avec $k \in \pm\mathbb{N}$ a un rayon proportionnel à \sqrt{k} . (on supposera i petit).
7. Peut-on utiliser une source étendue ?
8. On définit le contraste par :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Calculer le contraste et donner sa valeur pour $R = 0,5$; $0,7$; $0,9$ et $0,95$. Comment doit-on choisir R si l'on veut obtenir des anneaux lumineux sur fond noir ?

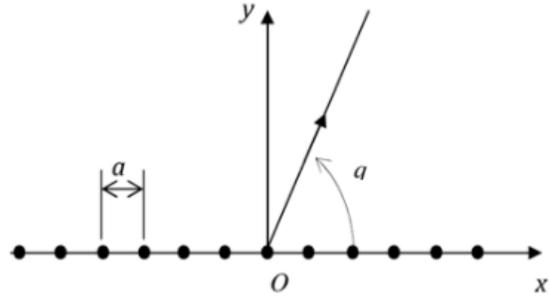
9. La figure ci-dessous a été obtenue avec une lampe à vapeur de sodium. Expliquer.



Exercice 10 ♦♦♦ : Radar à balayage électronique

On considère N antennes constituées par des fils perpendiculaires au plan $(P) = (Oxy)$. Les intersections des fils avec le plan (P) se trouvent sur l'axe (Ox) ; sur cet axe, la distance entre deux antennes vaut la moitié de la longueur d'onde d'émission λ . Toutes les antennes émettent des ondes en phase. On s'intéresse à leur émission dans le plan (P) à très grande distance des antennes.

1. Dans quelles directions l'intensité émise est-elle maximale ?
2. Les antennes ne sont plus en phase mais celle de rang p est déphasée de $\phi = p\varphi$ par rapport à l'antenne de rang 0. Comment choisir $\varphi(t)$ pour que la direction de puissance maximale tourne dans le plan (Oxy) à la vitesse angulaire constante ω ? Proposer une application.
3. Comment faudrait-il déphaser les antennes pour focaliser le rayonnement au point de l'axe Oy d'ordonnée y ?
4. On utilise cette fois le réseau d'antenne comme récepteur d'onde électromagnétiques provenant de l'infini, de longueur d'onde $\lambda = 2a$. Comment déterminer la direction de l'onde incidente ?

**Exercice 11** ♦♦♦ : Largeur des rires d'un réseau

Un réseau comprenant $n = 600$ traits par millimètre est éclairé par un faisceau parallèle monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 589,3$ nm en incidence normale. Le faisceau a une largeur $L = 1$ cm.

1. Dans quelles direction observe-t-on des raies ?

On s'intéresse dans la suite au pic d'ordre 1 et de direction θ_1 .

2. On note θ_1' la direction de première annulation de l'intensité dans l'ordre 1. Exprimer $\Delta(\sin \theta) = \sin \theta_1' - \sin \theta_1$ en fonction de λ et L .
3. Quelle est la variation $\Delta(\sin \theta)$ de la direction du pic d'ordre 1 si la longueur d'onde observée varie de $\Delta\lambda$?
4. Quel est le plus faible intervalle $\Delta\lambda$ de longueur d'onde que l'on peut distinguer dans l'ordre 1 ?

On rappelle $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ la résolution du réseau. Evaluer R dans l'ordre 1.

5. On observe le doublet jaune du sodium : $\lambda_1 = 589,0$ nm et $\lambda_2 = 589,6$ nm. Peut-on le résoudre ?
6. En fait, le faisceau n'est pas exactement parallèle. On utilise une fente source de largeur h au foyer d'une lentille convergente de focale $f' = 10$ cm. Quelle est alors la variation d'inclinaison $\Delta\theta_0$ d'une tel faisceau ?
7. En déduire la variation correspondante $\Delta'(\sin \theta)$ de l'angle de sortie dans l'ordre 1.
8. Quelle épaisseur h_0 de la fente produit le même élargissement d'une raie que celui lié intrinsèquement aux interférences ? Qu'en conclure ?
9. Distingue-t-on le doublet du sodium avec une fente large de $h = 0,5$ mm ?