Travaux dirigés 5

Diffusion thermique

Questions de cours

1. Définir la conduction thermique. Quelle est l'équation de transport de la chaleur par conduction thermique ?
2. Définir le flux thermique, le courant thermique. Quelles sont leurs unités ?
3. Etablir l'équation de la chaleur à une dimension dans un barreau parallélépipédique de longueur L de section S, dont la paroi latérale est calorifugée et dont chaque extrémité est en contact avec un thermostat aux températures respectives T_1 et $T_0 < T_1$. (Pas de source).
4. Etablir l'équation de la chaleur à une dimension dans un barreau cylindrique de longueur L de section S, dont la paroi latérale n'est pas calorifugée et dont une des extrémités est en contact avec un thermostat à la température T_0 et l'autre en contact avec l'air à température $T_a < T_0$. (Pas de source).
5. Etablir l'équation de la chaleur à une dimension dans un boule de rayon R telle que p_v soit la puissance volumique de source dans la boule.
6. Définir la résistance thermique. Donner des cas concrets d'association en série, en parallèle.
7. Montrer qu'en régime stationnaire, le flux thermique est indépendant des coordonnées d'espace.

Calculs

Calcul 1 :

Donner les éléments de volume ou de surface suivant. Les intégrer pour retrouver les volumes ou les surfaces.
1. Elément de surface dS d'une sphère de rayon R.
2. Elément de volume $d\tau$ d'une boule de rayon a.
3. Elément de surface latérale dS_{lat} d'un cylindre de hauteur h de rayon a.
4. Elément de surface latérale dS d'un cône de hauteur b de rayon de base R.

Calcul 2 :

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$$

avec $f(x = 0) = A$ et $\frac{df}{dx}(x = x_0) = h.(f(x = x_0) - \alpha)$.

Calcul 3 :

On donne l'expression du gradient :

i-. coordonnées cartésienne : $\overrightarrow{grad}\ f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$.

ii-. coordonnées cylindrique : $\overrightarrow{grad}\ f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$.

iii-. coordonnées sphérique : $\overrightarrow{grad}\ f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi}$.

Calculer les expressions des gradient suivant :

1. $f(x,y,z) = Bxy^2 + C.e^{2z}$ avec B et C des constantes.

2. $f(r,\theta,z) = A_0 + B.r.\sin(\theta) + C.\cos(\theta).\ln(z)$ avec A_0, B et C des constantes.

3. $f(r,\theta,\varphi) = A.\dfrac{e^{-r/h}}{r^2} + B\dfrac{1}{r}.\sin(\theta).\cos(\varphi) + C.\ln(r).\sin(\varphi).\cos^2(\theta)$ avec A, h, b et C des constantes.

Calcul 4 :

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\sin(4x)\cos(5x) - \sin(5x)\cos(4x)$.

2. $\dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)} - \dfrac{\cos(2x)}{\cos(x)}$ pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

3. $\cos(x) + \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \dfrac{4\pi}{3}\right)$

Niveau I

Exercice 1 ♦♦♦ : L'équation de la chaleur

Les extrémités d'une tige cylindrique (conduction axiale), homogène, de section S et de longueur L, sont maintenant (en régime forcé) à des températures constantes T_1 en $x = 0$ et $T_2 < T_1$ en $x = L$. Le régime est stationnaire et la paroi latérale est isolée thermiquement.

1. Evaluer le flux thermique Φ à travers la surface S ; dépend-il de x en régime stationnaire ?
Intégrer l'équation précédente après avoir séparé les variables, et en déduire que le flux thermique Φ (ou puissance transférée P) s'écrit sous la forme :

$$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} = G_{th}(T_1 - T_2) \tag{1}$$

et donner l'expression de R_{th}, sont unité, et interpréter G_{th}.

Un milieu de masse volumique ρ possède une capacité thermique massique c et une conductivité thermique λ ; ces grandeurs sont prises uniformes et constantes.

2. Etablir l'équation de diffusion à une dimension en l'absence d'autres phénomènes (pas de pertes latérales, pas de terme de création).

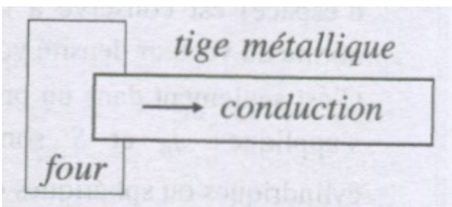
3. Généraliser la question précédente (toujours à une dimension) en introduisant un terme d'apport d'énergie thermique (citer des exemples) en notant p_v la puissance volumique algébrique apportée au volume Sdx pendant dt.
Indiquer également l'équation de conservation.

Exercice 2 ◆◆◇ : Durée d'un régime transitoire

1. Pourquoi est-on amené à parler : "d'équilibre thermodynamique local" ?
2. L'équation de conservation avec un terme de source se généralise à trois dimensions et en géométrie quelconque en :

$$div\,\vec{j}_{th} = \rho.c\frac{\partial T}{\partial t} = p_v \qquad (2)$$

Obtenir l'équation de diffusion en traduisant la loi de Fourier la plus générale.



3. Une tige cylindrique de longueur L (à conduction axiale et calorifugée sur la paroi latérale) est initialement à la température uniforme T_2 (celle de l'air environnant) et à $t = 0$, on lui applique une température T_1 en $x = 0$ (extrémité encastrée dans un four, voir le schéma, alors qu'elle demeure à T_2 en $x = L$; il s'instaure alors un régime transitoire. Estimer la durée τ d'établissement du régime permanent pour une tige d'acier pour laquelle $L = 25\,\mathrm{cm}$, puis $L' = 50\,\mathrm{cm}$; $\lambda = 82\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$; $c = 0,46.10^3\,\mathrm{J.k^{-1}.K^{-1}}$; $\rho = 7,8.10^3\,\mathrm{k\,m^{-3}}$.
Conclusion.

Exercice 3 ◆◆◆ : Résistance thermique d'un conducteur cylindrique

Un tronçon de longueur h d'une gaine d'isolation de conduite de conductivité λ, de capacité thermique massique c et de masse volumique ρ, a la forme d'un cylindre creux de rayon intérieur R_1 (température T_1) et de rayon extérieur R_2 (température T_2, on peut prendre $T_2 < T_1$).
1. Calculer le flux thermique Φ à travers un cylindre de hauteur h et de rayon r tel que $R_1 < r < R_2$; dépend-il de r ?
Intégrer l'équation précédente après avoir séparé les variables, et en déduire directement l'expression de la résistance R_{th} du tronçon.
2. Etablir l'équation spatio-temporelle de diffusion en coordonnées cylindriques. Quelle est en régime stationnaire, la distribution de température $T(r)$? En déduire la résistance R_{th} du tronçon ; commentaire sur la méthode.

Exercice 4 ◆◆◆ : Résistance thermique en géométrie sphérique

Un matériau homogène est compris entre deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), de conductivité thermique λ, de capacité thermique massique c et de masse volumique ρ. Les parois sphériques de ce matériau sont maintenues aux températures $T_1(r = R_1)$ et $T_2(r = R_2)$ et on suppose $T_1 > T_2$.
1. Calculer par la méthode habituelle la résistance thermique R_{th} de ce conducteur.
2. Puis établir l'équation spatio-temporelle de diffusion en coordonnées sphériques, et donner, en régime stationnaire, la distribution de température $T(r)$.

Exercice 5 ◆◇◇ : Cuisson d'un oeuf

La cuisson d'un oeuf de poule à la coque dure 3 minutes. Un oeuf moyen a une masse comprise entre 53 et 63 grammes. Quelle serait la durée moyenne de cuisson d'un oeuf d'autruche sachant que la masse de celui-ci est comprise entre 1, 2 et 1, 8 k?

Exercice 6 $^{\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge}$: Diffusion thermique dans une barre

On étudie le transfert thermique dans une barre homogène de section S, de longueur L, dont la surface latérale est calorifugée. On note $\overrightarrow{e_x}$ le vecteur unitaire colinéaire à l'axe de la barre. Les extrémités $x = 0$ et $x = L$ de la barre sont mises en contact thermique parfait avec des thermostats aux températures respectives T_1 et T_2. Le champ de température dans la barre ne dépend que de x et t. On note K la conductivité thermique du matériau, ρ sa masse volumique et c sa capacité thermique massique.

1. Etablir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ de température $T(x,t)$ dans la barre. Faire apparaître le coefficient de diffusion thermique, noté D.

2. En supposant la barre initialement uniforme en température, estimer la durée typique du régime transitoire (durée avent que le régime permanent ne s'établisse).

3. Lorsque le régime permanent est atteint, déterminer le profil de température $T(x)$ dans la barre et le tracer, en supposant par exemple $T_1 > T_2$.

4. Définir et exprimer la résistance thermique de la barre en régime permanent.

5. En appliquant le deuxième principe de la thermodynamique à la barre (régime permanent), exprimer $\dfrac{\delta S_c}{dt}$, la quantité d'entropie créée par unité de temps. Interpréter.

Exercice 7 $^{\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge}$: Etude thermique d'un fil conducteur

On considère un fil cylindrique de section S, de longueur L et de conductivité thermique λ. On note $T(x)$ la température dans la section à l'abscisse x, supposée uniforme. On impose aux deux extrémités du fil avec thermostats : $T(x = 0) = T_0$ et $T(x = L) = T_0$. Le fil est entouré d'une gaine sur sa surface latérale qui l'isole thermiquement. Le fil est traversé par un courant I, on peut alors montrer que la puissance reçue par un volume dV s'écrit $dP = \dfrac{I^2}{\gamma.S^2}dV$ où γ est une constante. On étudie dans la suite le régime stationnaire.

1. Quelle est l'unité de γ ?

2. En faisant un bilan d'enthalpie pour la portion de fil comprise entre x et $x + dx$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$.

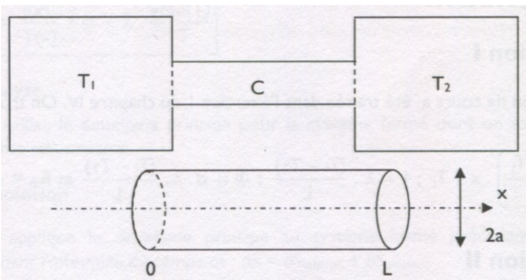
3. Résoudre cette équation et tracer l'allure de $T(x)$. Déterminer la température maximale dans le fil en fonction des données du problème.

4. Faire l'application dans le cas d'un fil de cuivre : $\lambda = 4.10^2\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$, $\gamma = 6.10^7 U.S.I$, $L = 1\,\mathrm{m}$, $S = 2\,\mathrm{mm}^2$, $T_0 = 300\,\mathrm{K}$ et $I = 1\,\mathrm{A}$. Commenter.

Niveau II

Exercice 8 ♦♦♦ : Création d'entropie par conduction thermique

Deux réservoir sont reliés par un conduite cylindrique, de longueur L, de section droite σ. Le problème sera supposé unidimensionnel, toute grandeur dans la conduite ne dépendant spatialement que de l'abscisse x.
L'ensemble contient un fluide incompressible, de masse volumique ρ, de chaleur massique c, de conductivité thermique λ (toutes ces grandeurs sont des constantes caractéristiques du fluide).



Le fluide est immobile dans le référentiel d'étude et le régime est stationnaire : toutes les grandeurs sont indépendantes du temps.
On suppose la conduite parfaitement calorifugée sur sa surface latérale. On note $d\tau = \sigma.dx$ un volume élémentaire de conduite (et le fluide qu'elle contient) situé entre les abscisses x et $x + dx$. On note δQ_e et δQ_s les transferts thermiques à travers les sections d'abscisse x et $x + dx$ de $d\tau$, pendant l'intervalle de temps dt.

1. On admet en régime permanent que la température est une fonction affine de x. Déterminer la répartition $T(x)$ de la température dans la conduite, l'expression du vecteur densité de flux de chaleur $\vec{j}_{th}$, le flux thermique Φ et la résistance thermique R_{th} de la conduite.
2. Evaluer les transferts d'entropie δS_e et δS_c à travers les sections d'abscisse x et $x + dx$ pendant l'intervalle de temps dt. Montrer qu'il est possible de définir un vecteur " densité de courant d'entropie" de diffusion $\vec{j}_s$ tel que :

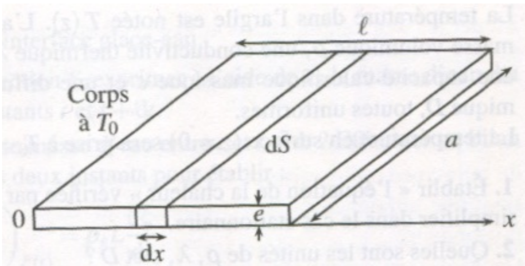
$$\vec{j}_s = -\lambda \frac{\overrightarrow{grad}\, T}{T} \tag{3}$$

2. En effectuant un bilan d'entropie, déterminer l'entropie s_c, créée dans la conduite, par unité de temps et de volume.
3. Déterminer l'entropie S_c créée dans la conduite, par unité de temps en fonction de R_{th}, T_1 et T_2.

Exercice 9 ♦◇◇ : Paradoxe de l'isolant

Un tuyau d'eau chaude est entouré par une gaine isolante de conductivité thermique λ, de rayon intérieur r_1 (égale au rayon extérieur du tuyau) et de rayon extérieur r_2. La gaine est en contact avec l'air ambiant avec lequel elle a un échange thermique suivant la loi de Newton, avec un coefficient d'échange h.
1. Pour une longueur l du tuyau exprimer les résistances thermiques et de la gaine isolante et de l'interface gaine isolante/air.
2. Etudier les variations de la résistance thermique équivalente avec r_2. Quel résultat paradoxal trouve-t-on ?

Exercice 11 ♦♦◇ : Etude simplifiée d'un dissipateur de chaleur



Les performance des puces électroniques utilisées dans les ordinateurs décroît avec leur température. Afin de dissiper une puissance élevée en limitant la température du composant, on installe un dissipateur de chaleur. Ce dissipateur est muni d'ailettes de refroidissement en parallèle. On en étudie une.
Une ailette de refroidissement en aluminium de conductivité thermique $\lambda = 200\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$ est fixée en $x = 0$ à un corps dont la température est $T_0 = 70\,^\circ\mathrm{C}$ constante. Elle baigne dans l'air ambiant de température $T_a = 20\,^\circ\mathrm{C}$. Le corps à la température T_0 occupe le demi-espace $x < 0$. L'ailette est de forme parallélépipédique, d'épaisseur $e = 2\,\mathrm{mm}$, de largeur $a = 3\,\mathrm{cm}$ et de longueur $l = 2\,\mathrm{cm}$.
On émet les hypothèses suivantes :
i- le régime étudié est stationnaire.
ii- la température d'un point de l'ailette n'est fonction que de x : elle sera donc notée $T(x)$,
iii- a est très grand devant e.
iv- la puissance thermique cédée à l'air extérieur par la surface latérale dS d'un élément de longueur dx (échanges conducto-convectifs) est :

$$d\mathcal{P} = h\big(T(x) - T_a\big)dS \qquad (4)$$

avec $dS = 2(a+e)dx \sim 2adx$. Où h est un coefficient constant : $h = 150$ USI.

1. Enoncer la loi de Fourier.
2. Quelle est la signification physique de cette loi ?
3. Quelle est l'unité du coefficient h ?
4. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ de l'ailette peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T(x) - T_a}{L^2} = 0 \qquad (5)$$

où L est une longueur caractéristique à exprimer en fonction de λ, h et e.
5. Calculer la valeur numérique de L.
6. Justifier les deux conditions aux limites suivantes vérifiées par $T(x)$:

$$T(0) = T_0 \text{ et } -\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right)_{x=l} = h\left(T(l) - T_a\right) \qquad (6)$$

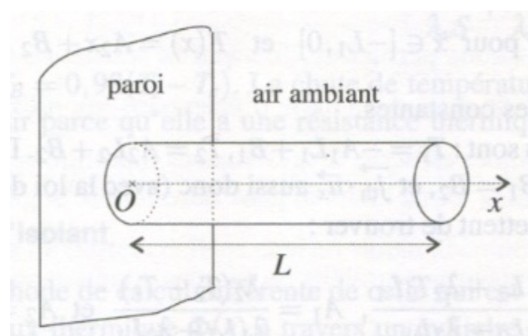
7. En déduire la loi $T(x)$ en fonction de x sous la forme : $T(x) = T_1 + T_2\left(ch\left(\frac{x}{L}\right) - f(l,L,\lambda,h)sh\left(\frac{x}{L}\right)\right)$.
où T_1 et T_2 dépendent de T_a et de T_0 et où f est une fonction de à expliciter.
8. Montrer que compte tenu de la longueur de l'ailette ($l = 2\,\mathrm{cm}$), la température de l'ailette est approximativement constante et égale à T_0 : on montrera que la valeur absolue de $\frac{T(l) - T_0}{T_0}$ est voisine de 2%.
On considère que la température de l'ailette est effectivement constante et égale à T_0.
9. Calculer l'expression de la puissance thermique $\mathcal{P}$ échangée entre l'ailette sur toute sa surface et l'air ambiant.
10. Déterminer la puissance thermique $\mathcal{P}'$ échangée entre le corps à la température T_0 et l'air ambiant par la surface d'aire $S' = ae$ en l'absence d'ailette (S' est la surface de base de l'ailette en $x = 0$).
11. En déduire l'expression de l'efficacité $\eta = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}'}$. Calculer sa valeur.

Exercice 10 ♦♦♦ : Stabilisation de la température dans un igloo

Pour passer la nuit, un inuit dort dans un igloo constitué de glace (ou neige compactée) de $S_i = 4\,\mathrm{m}^2$ de surface, la neige compactée est un bon isolant de conductivité thermique $\lambda = 0,25\,\mathrm{W.K^{-1}.m^{-1}}$. L'épaisseur de l'igloo est notée e.
La température extérieure $T_{ext} = -40\,^\circ\mathrm{C}$ est constante. Tous les points de l'air intérieur et des parois de glace sont à la même température T à un instant donné. On note P_f la puissance thermique traversant les parois par conduction thermique et R_i la résistance thermique de l'igloo.
1. L'inuit est une source thermique qui dégage $0,5M$ J par heure pendant son sommeil. Exprimer la puissance P_{th} dégagée par l'inuit dans les unités du système international.
2. Pendant la nuit, quand le feu à l'intérieur de l'igloo s'est éteint, la température intérieure est $T = 20\,^\circ\mathrm{C}$, tandis que celle à l'extérieur est $T_{ext} = -40\,^\circ\mathrm{C}$. Si la conduction thermique à travers les murs de l'igloo est le facteur dominant dans les pertes thermiques, quelle valeur doit avoir l'épaisseur e pour que l'intérieur de l'igloo ne refroidisse pas ?
3. Quel serait le schéma thermique (association de résistance thermique) si on devait considérer aussi les pertes thermiques dues à la porte d'entrée en peau de phoque et au fait que la paroi externe de l'igloo est recouverte d'une couche de neige fraîche dont la conductivité thermique est différente de celle de la neige compactée ?

Exercice 12 ♦♦♦ : Ailette de refroidissement

Une ailette de refroidissement, constituée par un cylindre d'axe (Ox), rayon r et longueur L, est fixée par sa base $x = 0$ sur une paroi dont la température est T_1. La paroi et l'ailette sont en contact avec l'air ambiant de température T_e, avec lequel ils ont des échanges thermiques régis par la loi de Newton avec un coefficient de transfert surfacique h. On souhaite calculer le flux thermique passant de la paroi à l'air ambiant par l'intermédiaire de l'ailette. On se place en régime stationnaire et on fait l'hypothèse que la température dans l'ailette ne dépend que de x.



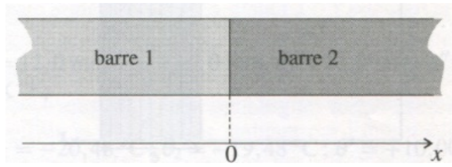
1. En appliquant le premier principe à la portion d'ailette comprise entre x et $x + dx$ montrer que $T(x)$ vérifie l'équation suivante : $\dfrac{d^2T}{dx^2} = \dfrac{2h}{r\lambda}\left(T(x) - T_e\right)$.
2. Montrer que $T(x)$ peut se mettre sous la forme : $T(x) = A\exp\left(\dfrac{x}{\delta}\right) + B\exp\left(\dfrac{-x}{\delta}\right) + T_e$, où δ est une constante à déterminer. Quelles sont les conditions aux limites du problème ?
Ces conditions conduisent aux expressions suivantes :

$$A = \frac{(T_1 - T_e)\alpha\exp\left(-2\frac{L}{\delta}\right)}{1 + \alpha\exp\left(-2\frac{L}{\delta}\right)}\quad B = \frac{T_1 - T_e}{1 + \alpha\exp\left(-2\frac{L}{\delta}\right)} \qquad (7)$$

avec $\alpha = \dfrac{\lambda - h\delta}{\lambda + h\delta}$.
3. Exprimer le flux thermique passant de la paroi à l'ailette en gardant A et B dans les calculs sans les remplacer par leurs expressions.
4. Le rôle de l'ailette est d'augmenter l'échange thermique entre la paroi et l'air ambiant. Définir un nombre sans dimension caractérisant l'efficacité de l'ailette et en donner une expression.
Application numérique : $r = 1\,\mathrm{mm}$, $L = 10\,\mathrm{cm}$, $\lambda = 400\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$, $h = 150\,\mathrm{W.m^{-2}.K^{-1}}$. L'ailette est-elle efficace ?

Exercice 13 ◆◇◇ : Sensation de froid et de chaud

Deux barres de très grandes longueur et de même section S ont des conductivités thermiques λ_1 et λ_2, des masses volumiques μ_1 et μ_2 et des capacités thermiques massiques c_1 et c_2. Ces deux barres, initialement de températures uniformes T_1 et T_2, sont mises en contact en $x = 0$ à l'instant $t = 0$. Leurs surfaces latérales sont parfaitement calorifugées.



1. Ecrire l'équation de diffusion thermique pour $x < 0$ et pour $x > 0$. Donner les expressions des diffusivités thermiques D_1 et D_2 des deux barres.
2. On admet que la fonction :

$$f_D(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\frac{x}{2\sqrt{Dt}}} \exp(-u^2)du \tag{8}$$

est solution de l'équation de diffusion thermique (D étant la diffusivité thermique) et que $\lim_{x\to\pm\infty} f_D(x,t) = \pm 1$.
Vérifier que : $f_D(0,t) = 0$ et $\dfrac{\partial f_D}{\partial x}(0,t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi D.t}}$.
3. En cherchant le champ de température sous la forme :

$$T_1(x,t) = A_1 + B_1 f_{D1}(x,t) \text{ pour } x < 0 \text{ et } T_2(x,t) = A_2 + B_2 f_{D2}(x,t) \text{ pour } x > 0 \tag{9}$$

Déterminer la température T_J à la jonction des deux barres. Exprimer T_J en fonction de T_1 et T_2, et des efficacités thermiques des deux barres : $E_1 = \sqrt{\mu_1 c_1 \lambda_1}$ et $E_2 = \sqrt{\mu_2 c_2 \lambda_2}$.
4. Calculer la température de contact entre la main ($T_{main} = 37\,^\circ\mathrm{C}$) et un objet de température $T_{objet} = 20\,^\circ\mathrm{C}$ lorsque cet objet est en bois ou en acier. On donne $E_{main} = 1,80.10^3$ USI, $E_{bois} = 0,40.10^3$ USI et $E_{acier} = 14,0.10^4$ USI. Commenter.

Exercice 14 ◆◆◆ : Intérêt d'un double vitrage

Une pièce rectangulaire de $5,0\,\mathrm{m} \times 8,0\,\mathrm{m}$, dont les murs ont une hauteur de $2,5\,\mathrm{m}$ et une épaisseur de $E = 0,3\,\mathrm{m}$, comprend une baie vitrée de $2,0\,\mathrm{m} \times 1,8\,\mathrm{m}$ et deux fenêtres de $1,2\,\mathrm{m} \times 1,2\,\mathrm{m}$, toutes les trois d'épaisseur de vitres $e = 2,0\,\mathrm{mm}$.
L'intérieur de la pièce est à la température $T_1 = 19\,^\circ\mathrm{C}$, et les deux grands murs avec baie et fenêtres donnent sur l'extérieur à la température $T_2 = 0\,^\circ\mathrm{C}$. Il n'y a aucun échange thermique à travers les deux autres (petits) murs, le sol et le plafond, les appartements voisins étant à la même température T_1.
Les conductivité thermiques du verre, d'un mur (béton+isolant) et de l'air sont $\lambda_v = 0,78\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$, $\lambda_M = 0,10\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$ et $\lambda_A = 0,026\,\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$.
1. Calculer les résistances thermiques R_v des vitres, R_M des murs concernés, puis R de l'ensemble. En déduire les flux thermiques Φ_v à travers les vitres, Φ_M à travers les murs concernés, et Φ_T à travers l'ensemble. Evaluer le rapport $\dfrac{\Phi_M}{\Phi_T}$ et conclure.
Pour limites les pertes par les parties vitrées, les vitres simples sont remplacées par du "double vitrage" : deux vitres d'épaisseur $e = 2,0\,\mathrm{mm}$ séparées par une couche d'air sans convection et d'épaisseur $e' = 4,0\,\mathrm{mm}$.
2. Calculer la résistance thermique d'une simple couche de vitre R_v, de la couche d'air comprise entre les deux couches de vitres R_A, puis du "double vitrage" dans son ensemble R_{DV}.
En déduire le flux thermique Φ_{DV} à travers le "double vitrage" et conclure. Que vaut alors le flux Φ'_T à travers l'ensemble murs+"double vitrage" ?
3. Afin d'avoir une idée du profil de température dans le double vitrage, calculer les températures T'_1 et T'_2 des parois du verre au contact de l'air compris entre les deux vitres. Conclure.

Exercice 15 ◆◇◇ : Ondes thermiques dans le sol

Cet exercice est destiné à comprendre comment les variations périodiques (journalières au saisonnières) de température à la surface de la terre diffusent dans le sous-sol. Les variations de température au niveau du sol se font autour d'une valeur moyenne T_0, ont une amplitude θ_0 et une pulsation temporelle ω. La température au sol est alors modélisée par la forme $T_0 + \theta_0 \cos(\omega.t)$. Il s'agit de la modélisation la plus simple d'un phénomène périodique : deux premiers termes d'une série de Fourier. Le sous-sol est modélisé comme un milieu semi-infini homogène dont le coefficient de diffusion thermique, uniforme, est noté D. En prenant un axe x vertical vers le bas, ayant pour origine la surface, on cherche la température du sous-sol sous la forme $T(x,t) = T_0 + \theta(x,t)$, θ étant à déterminer.

1. Donner l'équation aux dérivées partielles vérifiée par θ.

2. A la grandeur θ réelle, on associe la grandeur complexe $\underline{\theta}(x,t) = \underline{f}(x)\exp(j\omega.t)$. Donner l'équation différentielle vérifiée par $\underline{f}$ ainsi que sa solution générale.

3. Déterminer les deux constantes d'intégration de la solution à l'aide des conditions aux limites.

4. En revenant en notation réelle, déterminer alors la solution complète au problème de départ. Interpréter physiquement cette solution.

5. Tracer θ en fonction de x pour un instant fixé. Sachant que le coefficient de diffusion est $D \sim 6.10^{-7}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$, calculer les valeurs pertinentes pour $T = 1$ jour et $T = 1$ an.

6. Calculer à partir de quelle profondeur les variations annuelles de température, dont l'amplitude au sol est $\theta_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$, provoquent des variations de température dont l'amplitude est inférieure à $2\,^\circ\mathrm{C}$. Donner un exemple d'application des valeurs numériques trouvées.