

Travaux dirigés 6

Champ électrostatique

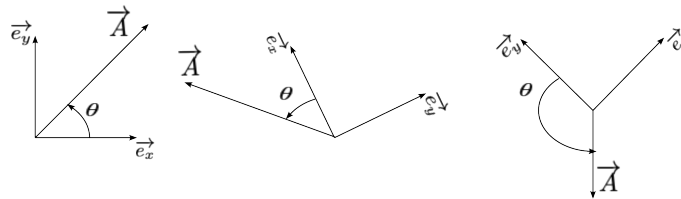
Questions de cours

1. Définir la charge électrique. Enoncer ses propriétés. Donner la loi de Coulomb.
2. Donner les unités des densités volumique, surfacique et linéique de charges. Exprimer dans chaque cas la charge totale contenue dans le volume, sur la surface et sur la ligne considérée.
3. Donner dans les éléments de volume $d\tau$ et de surface $d\vec{S}$ dans le cas d'un cylindre et d'une sphère.
4. Enoncer le principe de Curie. Définir un plan de symétrie d'une distribution de charge ; un plan d'anti-symétrie. Que peut-on dire du champ électrique dans chaque cas ?
5. Définir une ligne de champ. Que peut-on dire des points de croisement des lignes de champ ?
6. Définir le flux d'un champ de vecteur. Comment est défini le flux à travers une surface fermée ?
7. Enoncer le théorème de Gauss. Dans quels cas celui-ci ne peut-il pas être appliqué ? Donner l'analogie entre le champ électrostatique et le champ de gravitation.
8. Définir l'opérateur divergence. Donner son expression en coordonnées cartésiennes. Enoncer le théorème de Green-Ostrgradsky.
9. Donner l'équation de Maxwell-Gauss. Quelle est sa signification ?
10. Démontrer qu'un tube de champ vide de charge converge aux lieux de champ le plus intense.

Calculs

Calcul 1 :

Dans chaque cas exprimer les coordonnées du vecteur $\vec{A}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$.



Calcul 2 :

On considère une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Calculer dans chaque cas le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$, puis l'angle entre les deux vecteurs.

1. $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$
2. $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ et $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$
3. $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

$$4. \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$5. \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$6. \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcul 3 :

Faire les applications numériques suivantes en unités du système internationale :

1. $m = \frac{PV}{RT} M$ avec $P = 0,312$ bar, $V = 10$ L, R la constante des gaz parfait, $T = 70^\circ\text{C}$ et $M = 18\text{g.mol}^{-1}$.
2. $a = \left(\frac{k_B T}{P}\right)^{1/3}$ avec k_B la constante de Boltzman, $T = 273$ K et $P = 1$ atm.

Calcul 4 :

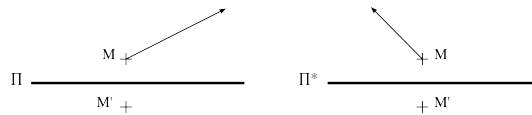
On donne la divergence dans différents systèmes de coordonnées :

- i. en coordonnées cartésiennes : $\text{div } \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$.
- ii. en coordonnées cylindriques : $\text{div } \vec{f} = \frac{1}{r} \frac{\partial r f_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$.
- iii. en coordonnées sphériques : $\text{div } \vec{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 f_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta f_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi}$.

Calculer dans chaque cas la divergence du champ de vecteur dans le système de coordonnées adapté :

1. $\vec{f}(x, y, z) = axye_x + byze_y + cze_z$.
2. $\vec{f}(r, \theta, z) = \alpha \frac{1}{r} \cos \theta \vec{e}_r + \beta \frac{1}{r} \sin \theta \vec{e}_\theta + \gamma z \vec{e}_z$.
3. $\vec{f}(r, \theta, \varphi) = a.e^{-r/R} \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_r + \frac{\sin^2 \theta}{r} \sin \varphi \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \cos^2 \theta \cos \varphi \vec{e}_\varphi$

Niveau I

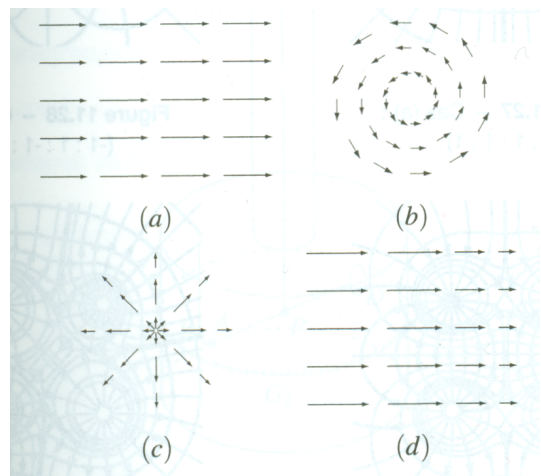
Exercice 1 ♦♦♦ : Symétries du champ électrostatique

1. Le plan Π est un plan de symétrie d'une distribution de charges $\rho(P)$. Le point M' est tel symétrique du point M par rapport à Π . Reproduire et compléter le schéma en dessinant le champ électrique au point M .
2. Le plan Π^* est un plan d'antisymétrie d'une distribution de charges $\rho(P)$. Le point M' est le symétrique du point M par rapport à Π^* . Reproduire et compléter le schéma en dessinant le champ électrique au point M' .

Exercice 2 ♦♦♦ : Lignes de champ

La figures ci-contre représentent, dans un plan $z = cte$, quelques cartes de champs bidimensionnels de la forme : $\vec{a}(x, y) = a_x(x, y)\vec{e}_x + a_y(x, y)\vec{e}_y$.

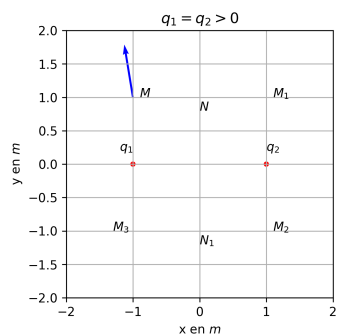
Préciser dans chaque cas s'il peut s'agir d'un champ électrostatique et quand c'est possible, dire si des charges sont présentes dans la région représentée.



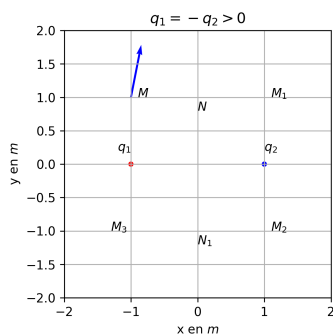
Exercice 3 ♦♦♦ : Exploitation des symétries

On a représenté dans un plan cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ la position de charges ponctuelles q_1, q_2, q_3 et q_4 ; et un représentant du champ de vecteur électrostatique $\vec{E}$ créé par l'ensemble des charges.

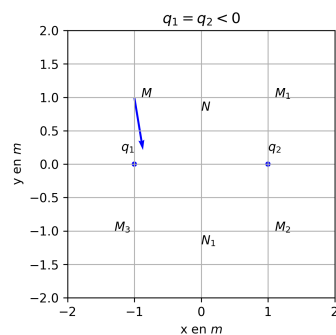
Dans chaque cas : reproduire la figure, identifier les plans de symétrie et d'anti-symétrie ; déterminer l'orientation du champ électriques aux points M_1 à M_3 ainsi qu'aux points N et N_1 . En déduire la forme des lignes de champ.



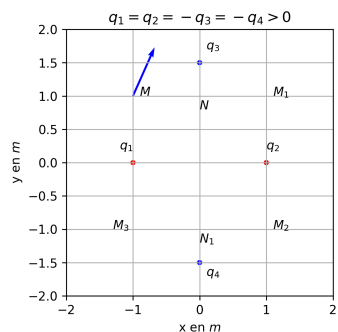
1.



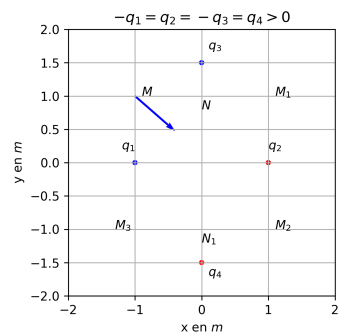
2.



3.

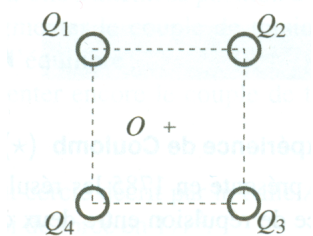


4.



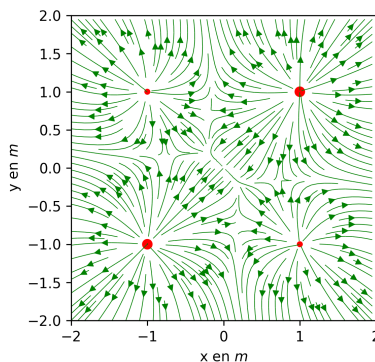
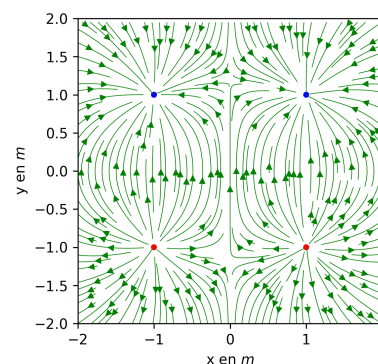
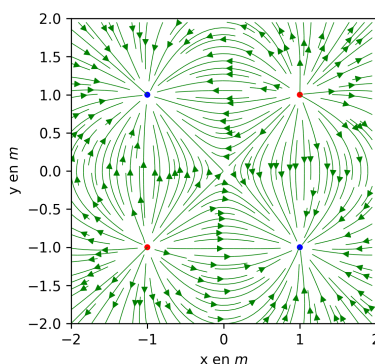
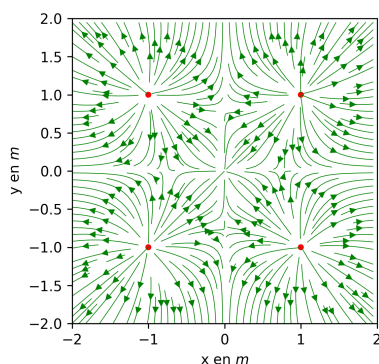
5.

Exercice 4 *** : Champ au centre d'un carré formé de quatre charges ponctuelles



Quatre sphères, assimilées à des charges ponctuelles, sont situées aux sommets O_1 , O_2 , O_3 et O_4 d'un carré de centre O , de côté $2a$. Elles portent les charges respectives Q_1 , Q_2 , Q_3 et Q_4 . Dans chacun des quatre cas répondre aux questions suivantes :

1. Quels sont les signes des charges ? Quels sont les plans de symétrie ? d'anti-symétrie ?
2. Que peut-on dire du champ au centre ? Y a-t-il des points où le champ est nul ?
3. Commenter soigneusement ces cartes de lignes de champ.



Exercice 5 ♦♦♦ : Topologie du champ électrostatique

1. Soit une charge q site à l'intérieur d'une sphère de rayon R . Le flux du champ électrostatique à travers cette sphère est-il modifié par le déplacement de la charge q ?
2. Le champ électrostatique est nul sur une surface fermée $\mathcal{S}$. Que peut-on dire de son flux à travers $\mathcal{S}$?
3. Le flux à travers une surface fermée $\mathcal{S}$ est nul. Le champ électrostatique est-il forcément nul sur la surface ?
4. Soit une distribution volumique de charges ρ continue et uniforme dans tout l'espace.
 - i- Que peut-on dire du champ électrostatique en un point M quelconque de l'espace ?
 - ii- Le théorème de Gauss est-il valide dans ce cas ? Expliquer.
5. Considérons un champ électrostatique de la forme $\vec{E}(M) = E_x(x, y, z)\vec{e}_x + E_y(x, y, z)\vec{e}_y + E_z(x, y, z)\vec{e}_z$ dans une base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.
En utilisant la définition d'une ligne de champ, déterminer son équation. Faire de même pour un champ électrostatique exprimé dans une base cylindrique et dans une base sphérique.

Exercice 6 ♦♦♦ : Distributions courantes de charges

Pour les distribution suivantes déterminer en tout point de l'espace : le champ électrostatique, le potentiel et l'équation des lignes de champ.

1. Une boule de rayon R portant la charge Q uniformément répartie dans son volume.
2. Une sphère de rayon R chargée uniformément en surface avec une densité surfacique σ .
3. Un cylindre infiniment long de rayon a uniformément chargé en volume de densité ρ .
4. Un fil infini chargé uniformément d'une densité linéique λ .
5. Une distribution de charge, infinie dans les direction parallèle à Oy et Oz , définie par la densité volumique

$$\rho(x) = 0 \text{ pour } x \in]-\infty, -a[\quad (1)$$

$$\rho(x) = \rho_0 \text{ pour } x \in [-a, a] \quad (2)$$

$$\rho(x) = 0 \text{ pour } x \in]a, \infty[\quad (3)$$

Montrer que l'on retrouve le champ et le potentiel du plan infini chargé par une densité σ pour $a \rightarrow 0$.
En déduire la relation de passage (loi de discontinuité) du champ électrique à la traversé de la surface chargée.

Niveau II

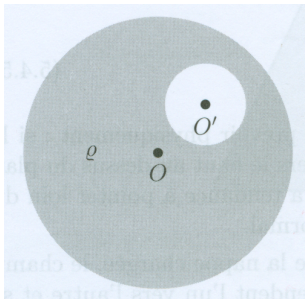
Exercice 7 ♦♦♦ : Champ créé par un noyau atomique

Du point de vue du potentiel V et du champ électrostatique $\vec{E}$ qu'ils créent, les noyaux de certains atomes légers peuvent être modélisés par une distribution volumique de charge à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon a . On désigne par $r = OM$ le vecteur position d'un point M quelconque de l'espace. Pour $r < a$, la densité volumique de charge $\rho(M)$ qui représente le noyau varie en fonction de r selon :

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (4)$$

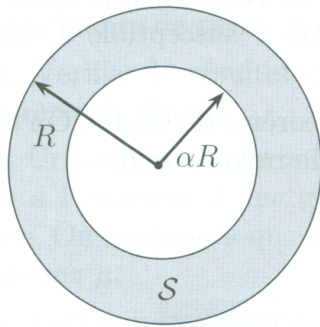
1. Calculer la charge totale Q en fonction de ϵ_0 , ρ_0 et a .
2. Peut-on appliquer le théorème de Gauss pour calculer le champ électrostatique ?
3. Calculer le champ électrostatique $\vec{E}_+(M)$ en tout point M extérieur à la sphère ($r > a$) en fonction de ρ_0 , a et r .
4. Calculer le champ électrostatique $\vec{E}_-(M)$ en tout point M intérieur à la sphère.
5. Le champ est-il continu en $r = a$?

Exercice 8 *** : Champ dans une cavité



1. Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en un point M d'une cavité sphérique de centre O' , de rayon R' , située à l'intérieur d'une boule de centre O et de rayon R chargée avec la densité volumique uniforme ρ .
- 2.a. En déduire le champ électrostatique en un point M situé à l'intérieur d'une sphère creuse de rayon R et uniformément chargée en surface avec la densité σ .
- 2.b. Vérifier le résultat de la question 2.a à l'aide d'une application directe du théorème de Gauss.
- 3.a. Utiliser les résultats de la question 1. pour déterminer le champ gravitationnel créé à l'intérieur d'une grotte sphérique de centre K creusée à l'intérieur de la Terre. On supposera que la Terre est une sphère de centre T et de masse volumique μ .
- 3.b. Déterminer l'orientation de la surface libre d'un lac au repos situé à l'intérieur de la grotte.

Exercice 9 *** : Etude d'une couronne sphérique



Une sphère creuse S , de centre O , de rayon extérieur R et de rayon intérieur αR ($\alpha < 1$) est électriquement chargée en volume avec une charge volumique uniforme ρ . La distribution est représentée en grisé sur la figure.

1. Calculer le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en un point M extérieur à la sphère.
2. Calculer $\vec{E}(M)$ pour $r \in [\alpha R, R]$.
3. Déduire le potentiel électrostatique $V(r)$ pour $r > R$ en choisissant l'origine de potentiel à l'infini.
4. Déterminer $V(r)$ pour $r < \alpha R$.
5. Lorsque $1 - \alpha \ll 1$, S devient une coquille sphérique de faible épaisseur, que l'on assimile à une sphère de rayon R uniformément chargée en surface avec la densité surfacique σ . Déterminer

σ en fonction de α , ρ et R .

6. Dans l'hypothèse de la question précédente, déterminer la différence de potentiel $U = V(R) - V(0)$.

Exercice 10 *** : Structure d'une étoile : Banque PT 2016

On donne l'équation d'équilibre d'un fluide dans un référentiel galiléen sous l'action des forces de pression et des forces de gravitation :

$$\rho \cdot \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{0}$$

Considérons une étoile sphérique de rayon R_E formée de gaz. On suppose sa masse volumique ρ uniforme.

1. Ecrire le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel. En déduire l'expression du champ gravitationnel $\vec{G}$ à l'intérieur de l'étoile sphérique.
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la pression P .
3. Déterminer l'expression de $P(r)$.
4. Donner la température au centre de l'étoile ($r = 0$).
5. Quelles sont les limites du modèle ?

Exercice 11 ♦♦♦ : Calcul du champ créé par un demi-cylindre

On considère une demi-cylindre infini suivant l'axe (Oz) , de rayon R , occupant le demi-espace $y \geq 0$, et chargé en volume par une densité de charges uniforme $\rho > 0$.

1. Quelle est la direction du champ électrostatique $\vec{E}$ créé par cette distribution de charge en un point M de l'axe (Oz) ?

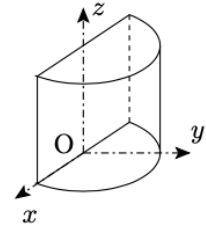
Pour calculer le champ créé par le demi-cylindre, on peut le décomposer en fils rectilignes infinis.

2. A l'aide du théorème de Gauss, retrouver l'expression du champ électrostatique $\vec{E}_0$ créé en un point M situé à distance r d'un fil rectiligne infini de densité linéique uniforme λ .

On repère la position d'un point P du demi-cylindre par ses coordonnées cylindrique (r, θ, z) . On note dS la surface élémentaire dans le plan (Oxy) .

3. Déterminer la relation entre ρ , λ et dS .

4. En déduire par intégration le champ électrostatique créé par le demi-cylindre envisagé, en un point M de l'axe (Oz) et en fonction de ρ , R et ε_0

**Exercice 12 ♦♦♦ : Charge semi-infini**

Des charges sont réparties en volume dans le demi-espace $x \geq 0$, avec une densité volumique ρ dépendant de l'abscisse x suivant la loi :

$$\rho(x) = \rho_0 \exp\left(-\frac{x}{a}\right)$$

où ρ_0 et a sont des constantes positives. Le demi-espace $x < 0$ est vide de charge.

On note $\vec{E}$ le champ créé par cette distribution en tout point de l'espace.

1. Déterminer la direction et les dépendances spatiales de $\vec{E}$.

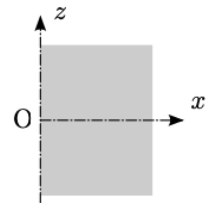
On envisage le calcul de $\vec{E}$ par découpage de la zone $x > 0$ en couches planes infinitésimales comprises entre x et $x + dx$.

2. Exprimer, en fonction de $\rho(x)$, la densité surfacique $\sigma(x)$ d'une telle couche plane.

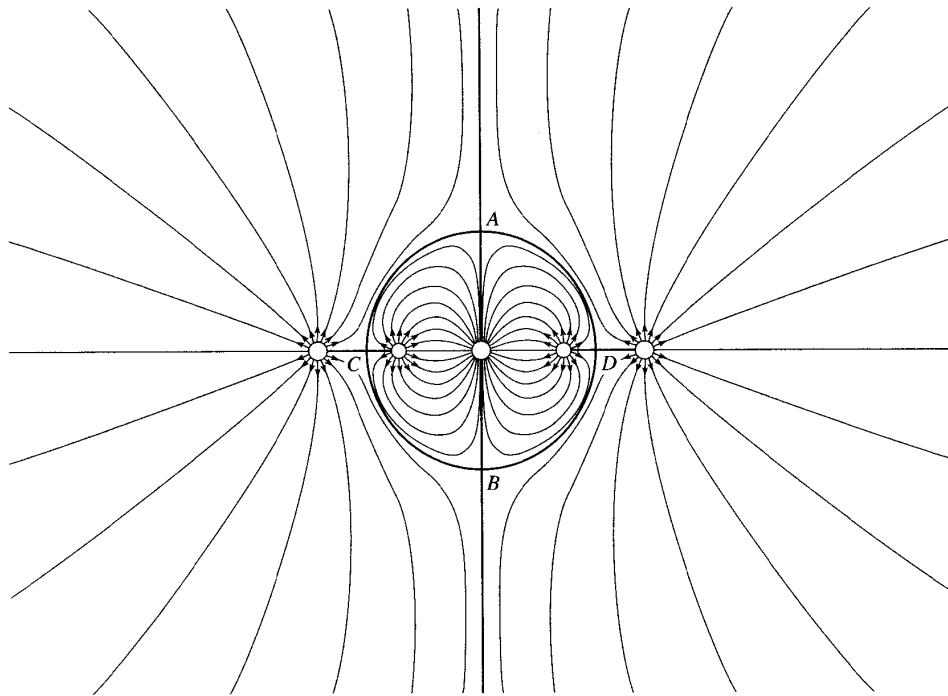
On rappelle que le champ électrostatique créé par un plan infini chargé en surface par une densité uniforme σ est : $E_0 = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}$.

3. Déduire l'expression de $E(x)$, en distinguant les cas $x < 0$ et $x > 0$.

4. Tracer l'allure de la fonction de $E(x)$.



Exercice 13 *** : Etude d'une carte de champ



Le schéma représente les lignes de champ créées par cinq charges ponctuelles numérotées de 1 à 5 de la gauche vers la droite. Le champ est nul aux points A , B , C et D . Les lignes en traits épais issues de ces points sont également des lignes de champ.

1. Déterminer les signes des cinq charges.
2. Justifier l'existence et la position des points du champ nul.
3. Analyser la symétrie du schéma. Quelles relations peut-on en déduire entre q_1 , q_2 , q_3 et q_5 ?
4. En appliquant le théorème de Gauss, déterminer la relation liant q_2 et q_3 .

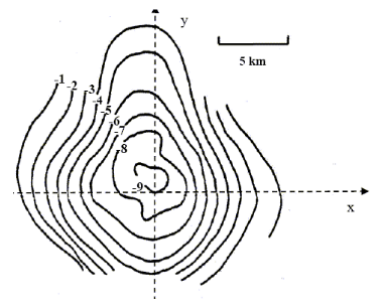
Exercice 14 *** : Anomalie gravitationnelle

Le champ de gravitation terrestre peut parfois présenter certains écarts à une valeur de référence. Ces anomalies sont mesurées en milligal ($1\text{mGal} = 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$). On définit l'anomalie de Bouguer du champ de pesanteur terrestre comme la grandeur :

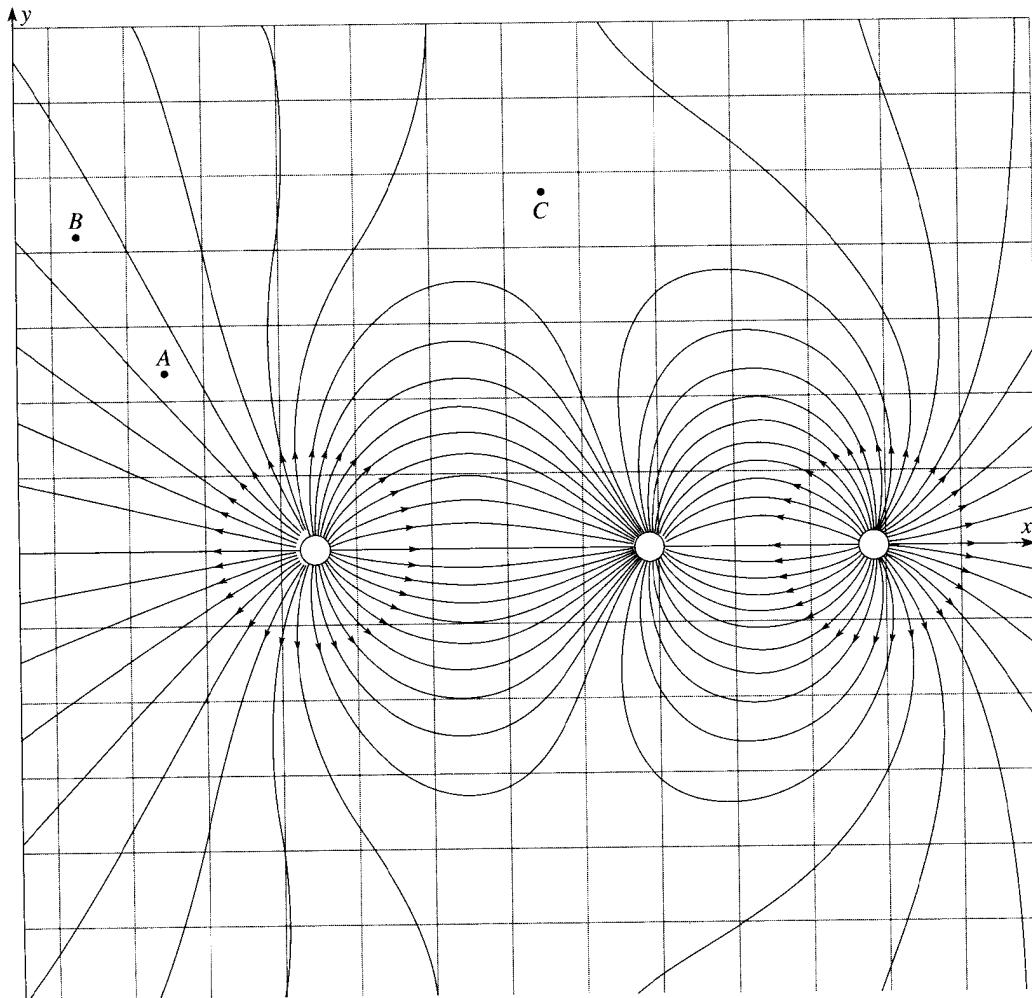
$$\Delta g_B = (\vec{g}_{\text{mesure}} - \vec{g}_{\text{ref}}) \cdot \vec{e}_z$$

On considère une boule de sel, de centre O et de rayon R , située à la distance d de la surface de la Terre. Elle est de masse volumique μ_1 et est plongée dans un amas de sédiments de masse volumique μ_2 .

1. Calculer l'anomalie de Bouguer Δg_B créée par la présence de cette boule de sel.
2. Voici une allure de carte représentant les courbes iso-anomalies en mGal, engendrées par la présence de cette boule de sel dans le désert mexicain. On donne par ailleurs la densité du sel (2200 kg.m^{-3}) par rapport aux sédiments (2400 kg.m^{-3}). A partir des mesures proposer une méthode pour trouver d .
3. En déduire R .
4. Utilité pratique de ce genre de relevés ?



Exercice 15 ♦♦ : Etude d'une carte de champ



Le schéma représente les lignes du champ électrostatique créé par des fils très longs, uniformément chargés, perpendiculaires au plan de la figure.

1. Où sont situés les points d'intersection des fils avec le plan du schéma ?
2. Quel est le signe de la densité linéique de charge de chacun d'entre eux ?
3. Quel est le signe de la densité linéique de charge totale ?
4. La norme du champ en A est de $100 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Calculer une valeur approchée du champ en B .
5. Que peut-on dire du champ au voisinage du point C ?

Exercice 16 ♦♦ : Potentiel de Yukawa

On donne en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \vec{e}_r$$

1. A quelle distribution de charge ce champ correspond-il ?
2. Que peut-on dire de la charge totale de cette distribution ?
3. Que pourrait être cette distribution ?