TP n°12 : Propagation d'ondes électromagnétiques dans un câble coaxial

Objectifs du TP :
Etudier le phénomène de propagation d'une onde électromagnétique.
Réaliser une mesure de célérité et d'impédance d'un milieu.
Etudier le phénomène d'onde stationnaire dans une cavité.

I Modèle et étude de la propagation électromagnétique

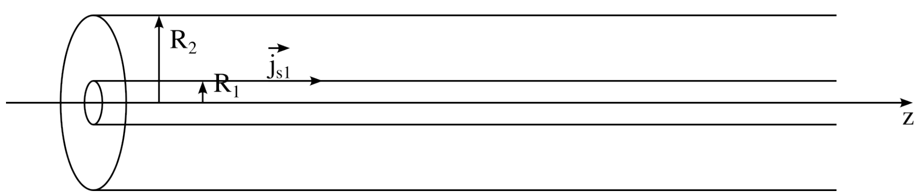
I.1 Modélisation

Un câble coaxial, utilisé en TP comme dans l'industrie, pour la transmission d'information est constitué de deux conducteurs cylindriques coaxiaux séparé par un isolant en polyéthylène. Le conducteur central : appelé **âme** est un cylindre plein de rayon $R_1 = 0,25\,\mathrm{mm}$. Le conducteur périphérique : appelé **gaine** est réalisé avec un fil tressé. On peut alors considérer que les courants circulant dans ces conducteurs sont surfacique (modèle des conducteurs parfaits). Notons $\overrightarrow{j}_{s1}$ et $\overrightarrow{j}_{s2}$ les densités surfaciques de courant respectivement dans l'âme et la gaine. Alors $\overrightarrow{j}_{s1} = j_{s1}\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{j}_{s2} = j_{s2}\overrightarrow{e_z}$.
Dans un premier temps on assimile l'espace $R_1 < r < R_2$ à du vide tel que $\rho = 0$ et $\overrightarrow{j} = 0$ et de constantes électromagnétique $\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}\,\mathrm{F.m^{-1}}$ et $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\,\mathrm{H.m^{-1}}$. Le champ électrique dans l'espace entre l'âme et la gaine s'exprime :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = E_r(M,t)\overrightarrow{e_r} = \frac{E_0 R_1}{r}\cos(\omega.t - kz)\overrightarrow{e_r}$$

On note $V_1 = V(r = R_1)$ et $V_2 = V(r = R_2)$ les potentiels, la différence de potentiel entre l'âme et la gaine est noté $u(z,t) = V_1 - V_2$. Une étude électromagnétique dans l'ARQS permet d'obtenir l'expression de la capacité linéique :

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}$$



Dans un premier temps on considère le régime stationnaire.

1. *S'approprier* Considérant que le courant circulant dans l'âme est uniforme est s'exprime I_0, déterminer les expressions de $\overrightarrow{j}_{s1}$ et $\overrightarrow{j}_{s2}$.

2. *S'approprier* Déterminer l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$ dans l'espace $R_1 < r < R_2$.

3. *S'approprier* Après avoir définit l'inductance propre d'une portion de longueur l du câble, déterminer l'expression de l'inductance linéique Λ.

4. *Analyser* Réaliser les applications numériques de C et Λ.

On s'intéresse maintenant au phénomène de propagation, tension et courant sont donc des grandeurs $u(z,t)$ et $i(z,t)$, le champ électrique s'exprime comme indiqué dans le préambule.

5. *Analyser* Donner dans l'espace $R_1 < r < R_2$ les équations de Maxwell. En déduire l'équation de propagation du champ dans cet espace et l'équation de dispersion.
Le milieu est-il dispersif ? Exprimer la vitesse de phase des OPPM dans le milieu.

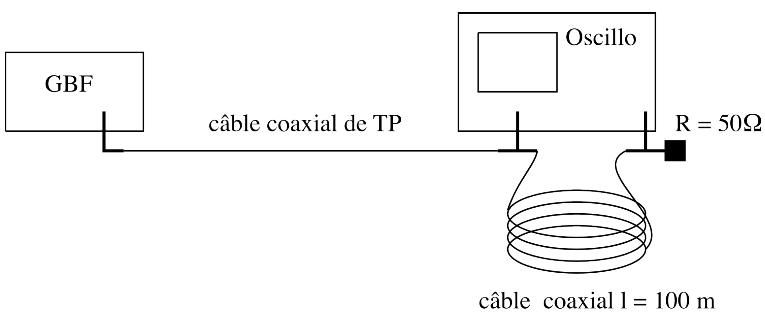
6. *Analyser* A partir des équations de Maxwell, et en faisant l'hypothèse qu'il n'existe pas de composante stationnaire, exprimer le champ magnétique dans l'espace $R_1 < r < R_2$. L'onde est-elle transverse électromagnétique ?
7. *Analyser* Définir la tension comme la circulation du champ électrique. En déduire l'expression de la tension $u(z,t)$ dans le câble.
De même, des relations de passage sur champ magnétique, déduire l'expression de $\overrightarrow{j}_{s1}$ et de $i(z,t)$.

8. *Valider* L'impédance du câble est défini par : $Z_c = \dfrac{u(z,t)}{i(z,t)}$. Exprimer cette impédance en fonction de μ_0, ε_0, R_1 et R_2. Montrer alors que cette impédance s'exprime $\sqrt{\dfrac{\Lambda}{C}}$.
Faire l'application numérique de Z_c.

9. *Valider* Pour un milieu non vide, tel que le polyéthylène, on remplace dans les équations ε_0 par $\varepsilon_0.\varepsilon_r$ avec ε_r la permittivité relative de milieu. Grandeur sans dimension dont la valeur est ici $\varepsilon_r = 2,2$.
En déduire les valeurs de C, Λ, Z_c et v la célérité des ondes dans ce milieu.

I.2 Etude expérimentale

On étudie ici la propagation d'une impulsion dans le câble coaxiale. On ne dispose pas de générateur d'impulsions, mais seulement d'un GBF.



Réaliser Comment avec une tension créneau, peut-on réaliser une impulsion ? Pour quel domaine de fréquence peut-on considérer le câble de $l = 100\,\text{m}$ dans l'ARQS ?

Réaliser Réaliser le montage présenté sur la figure précédente. Régler le GBF de façon à observer en $CH1$ l'impulsion d'entrée et en $CH2$ l'impulsion en bout de câble.
En déduire la célérité de l'onde électromagnétique dans le câble coaxiale.

Valider Comparer votre mesure avec la célérité prévue dans la partie théorique.
Vous estimerez les incertitudes de mesure et la conséquence sur la célérité.

On règle maintenant le GBF de tel sorte qu'il délivre une tension harmonique de fréquence f.

Analyser Pourquoi observe-t-on un déphasage entre la tension d'entrée et la tension en bout de câble ?

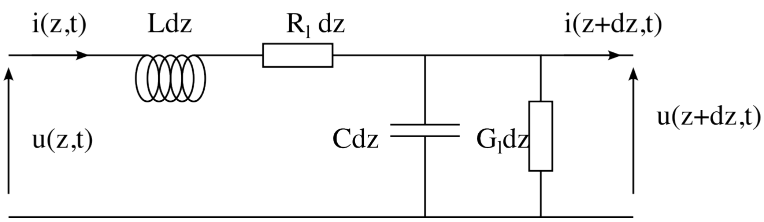
Réaliser Mesurer pour chaque fréquence f le retard temporel Δt du signal de sortie par rapport au signal d'entrée. En déduire la célérité de l'onde. Le milieu est-il dispersif ? Déduire de vos mesure la valeur de ε_r.

f en kHz	10	20	30	40	70	100	200	400	700	1000
Δt en s										
c_2 en $\mathrm{m.s^{-1}}$										

II Modèle et étude électrocinétique de la propagation

II.1 Modélisation

Le câble étant caractérisé par une inductance linéique et une capacité linéique, et remarquant que la tension est atténuée au cours de la propagation on peut adopter le modèle suivant :



10. *Analyser* A partir de la loi des noeuds et de la loi des mailles établir l'équation de propagation de la tension $u(z,t)$ à l'ordre 1 en dz et en dt.
Montrer que pour un ligne sans perte on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Les solutions en onde progression se mettent sous la forme :

$$i(z,t) = I_0 e^{j(\omega.t-kz)} + I_1 e^{j(\omega.t+kz)}$$

$$u(z,t) = Z_c\left(I_0 e^{j(\omega.t-kz)} - I_1 e^{j(\omega.t+kz)}\right)$$

11. *Analyser* En imposant une impédance Z en $z = l$ (bout du câble) montrer qu'on peut exprimer :

$$u(z,t) = Z_c I_0 e^{j\omega.t}\left(e^{-jkz} - \frac{Z_c - Z}{Z + Z_c}e^{j(\omega.t-2kl)}\right)$$

12. *Analyser* On définit le coefficient de réflexion par : $r = \dfrac{u_{reflechi}}{u_{incident}}$.
Montrer que $r = \dfrac{Z_c - Z}{Z_c + Z}$. En déduire alors r pour un court-circuit, un circuit ouvert et pour $Z = Z_c$.

13. *Analyser* Dans le cas d'un circuit ouvert.
Montrer qu'une onde stationnaire peut exister dans le câble. De quel type de cavité s'agit-il ?
Etablir en $z = 0$ l'expression des fréquences pour lesquelles on trouve des noeuds, puis des ventres.
Qu'en est-il lorsqu'on introduit un court-circuit ?